P.311 1.a

$$y=\frac{x^3}{1-x^2}$$

a) $\text{Dom } y = \mathbb{R} \sim \{-1, 1\}$

$1-x^2=0 \rightarrow 1=x^2 \rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$

b) Puntos de corte con ejes (0, 0).

$x=0 \rightarrow y=\frac{0^3}{1-0^2}=0 \quad (0,0)$

$y=0 \rightarrow \frac{x^3}{1-x^2}=0 \rightarrow x^3=0 \rightarrow x=0 \rightarrow (0,0)$

c) Asíntotas

Asíntotas verticales: (las buscamos en los valores de x que no son del dominio).

$x=-1$

$\lim_{x\to -1} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{-1}{1-0} = \frac{-1}{0} = \infty \Rightarrow x=-1$ es a.v.

Posición de la curva respecto de la asíntota:

- a la izquierda de -1

$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{1-x^2} \overset{x=-1'1}{=} \frac{-}{-}\infty = +\infty$

- a la derecha de -1

$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{1-x^2} \overset{x=-0'9}{=} \frac{-}{+}\infty = -\infty$

$x=-1$

$x=1$

$\lim_{x\to 1} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow x=1$ es a.v.

Posición de la curva respecto de la asíntota.

$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{1-x^2} \overset{x=0'9}{=} \frac{+}{+}\infty = +\infty$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{1-x^2} \underset{x=1'1}{=} \frac{+}{-}\infty = -\infty$

$x=1$

Asíntota horizontal

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$$

No hay

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots = -\infty$$

Asíntota oblicua : $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x-x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{-x^3} = \lim_{x\to+\infty} (-1) = -1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} - \overset{m}{(-1)}\,x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} + x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x-x^3}{1-x^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1-x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

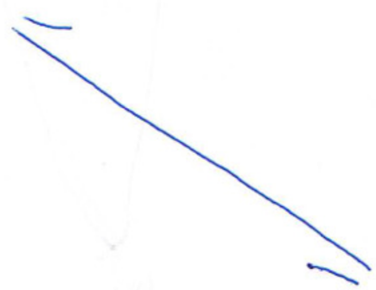
La asíntota oblicua es $y = -1 \cdot x + 0 = -x$

Posición de la curva respecto de la asíntota:

En $-\infty$, $x = -1000 \Rightarrow$ función $= \dfrac{(-1000)^3}{1-(-1000)^2} = 1000'001$; asíntota $= -(-1000) = 1000$ } función > asíntota

En $+\infty$, $x = 1000 \Rightarrow$ fun $= \dfrac{1000^3}{1-1000^2} = -1000'001$; asint : -1000 } fun < asint.

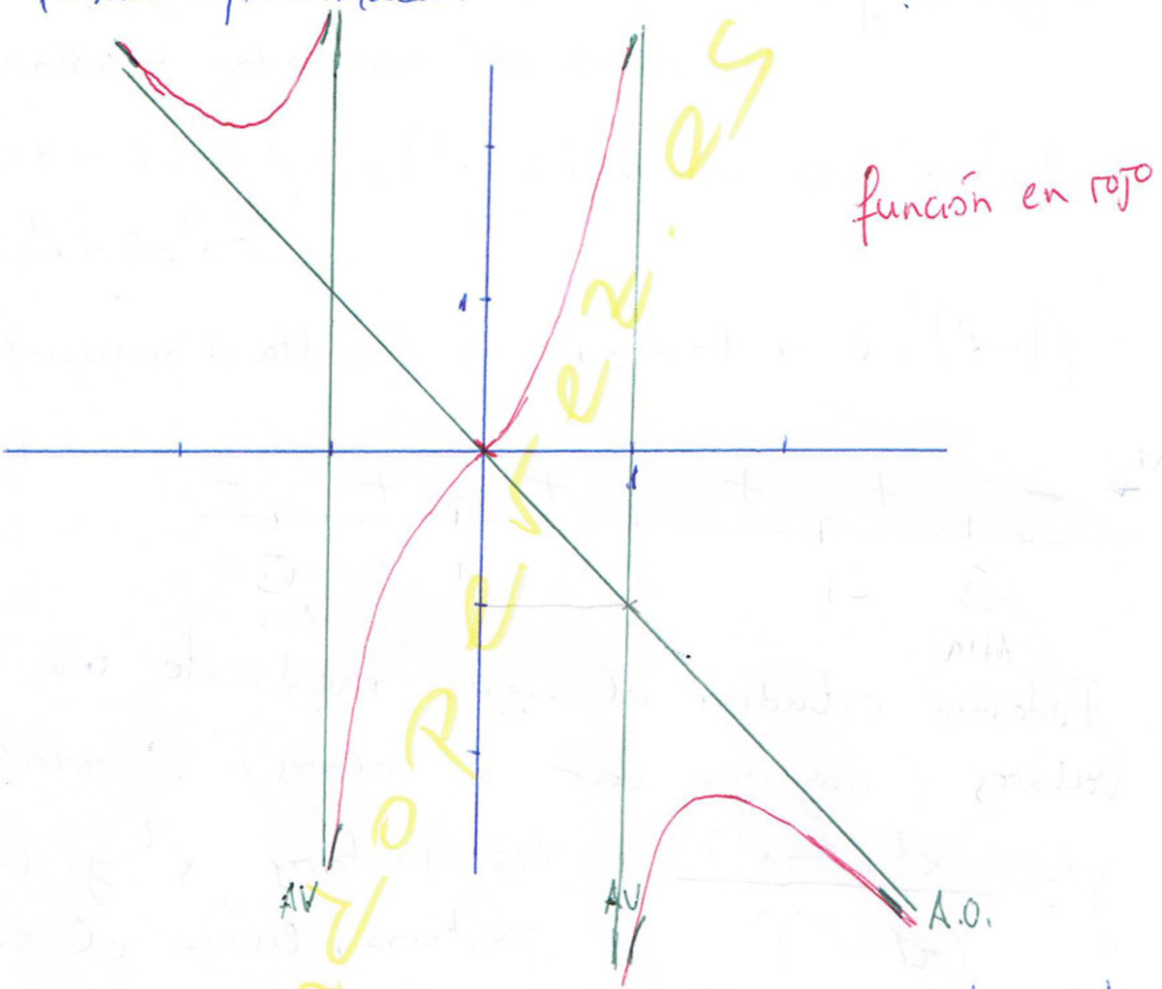
luego, la asíntota oblicua y la posición de la curva respecto de ella es:



Con los cálculos realizados podemos representar la función de forma aproximada:

A.O. $y=-x$

x	y
0	0
1	-1



La representación quedará más exacta cuando obtengamos máx - mi.

d) $y' = \dfrac{3x^2(1-x^2)-x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{3x^2-3x^4+2x^4}{(1-x^2)^2} = \dfrac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^2}$

$$y'' = \frac{(6x-4x^3)(1-x^2)^{\cancel{2}} - (3x^2-x^4)\,2\cancel{(1-x^2)}(-2x)}{(1-x^2)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{6x-4x^3-6x^3+4x^5+4x(3x^2-x^4)}{(1-x^2)^3} =$$

$$= \frac{6x-10x^3+\cancel{4x^5}+12x^3-\cancel{4x^5}}{(1-x^2)^3} = \frac{2x^3+6x}{(1-x^2)^3}$$

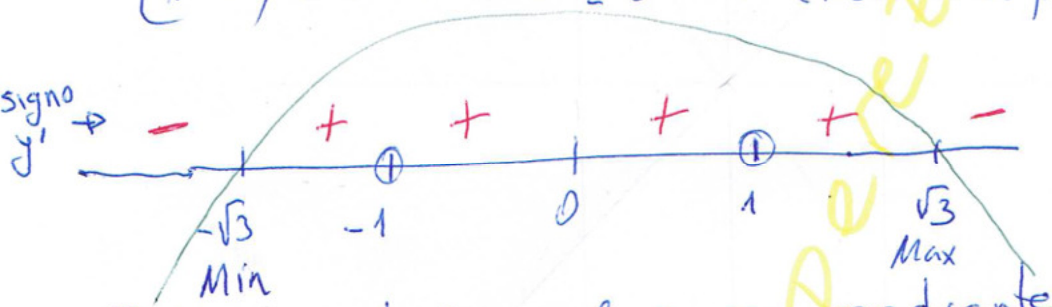
e) Monotonía:

Signo de y', como y' es un cociente hay que buscar las raíces del numerador y denominador.

$$3x^2 - x^4 = 0 \rightarrow x^2(3-x^2) = 0 \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ 3 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$(1-x^2)^2 = 0 \rightarrow 1 - x^2 = 0 \rightarrow$ (resuelta al principio) $x = \pm 1$

-1 y $1 \notin$ Dom y



Podemos estudiar el signo mediante una tabla de valores (hay que dar 6 valores) o analizando y'

$$y' = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

los factores x^2 y $(1-x^2)^2$ son positivos, luego el signo de y' depende de $3-x^2$ que es polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 neg $(\cap)$ y raíces $\pm\sqrt{3}$.

lo que represento en verde.

y es creciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

decreciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

Para $x = -\sqrt{3} \rightarrow y = \dfrac{(-\sqrt{3})^3}{1-(-\sqrt{3})^2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \simeq 2'60 \Rightarrow$ Mínimo $\left(-\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) \simeq (-1'73, 2'60)$

Para $x = \sqrt{3} \rightarrow y = \dfrac{(\sqrt{3})^3}{1-(\sqrt{3})^2} = \dfrac{-3\sqrt{3}}{2} \simeq -2'60 \rightarrow$ Máximo $\left(\sqrt{3}, \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right) \simeq (1'73, -2'60)$