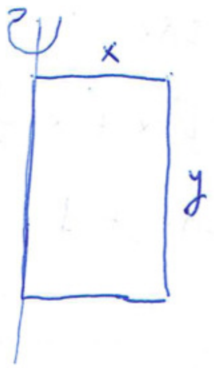
51)



$P = 60\,cm$

$2x + 2y = 60 \rightarrow x + y = 30 \rightarrow y = 30 - x$

Al girar la cartulina alrededor del lado vertical engendra un cilindro de altura "y" y radio de su base "x"

$$V = \pi r^2 h \rightarrow V = \pi \cdot x^2 y = \pi \cdot x^2 (30 - x)$$
$$= \pi \left(30x^2 - x^3\right)$$

El dominio de esta función será $\begin{cases} x \geq 0 \\ 30 - x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 30 \geq x \end{cases} \rightarrow [0, 30]$

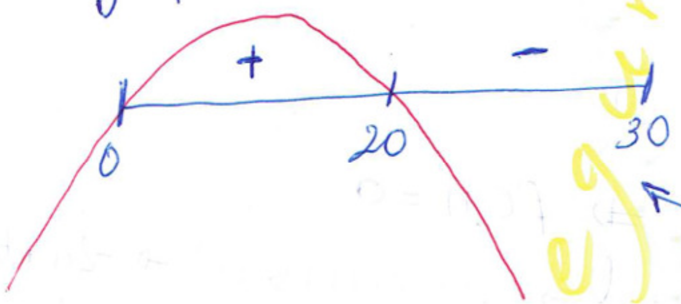
Busquemos su máximo.

$$V' = \pi \left(60x - 3x^2\right)$$

Signo de V':

$$60x - 3x^2 = 0 \rightarrow 3x(20 - x) = 0 \begin{cases} 3x = 0 \rightarrow x = 0 \\ 20 - x = 0 \rightarrow x = 20 \end{cases}$$

Hay que estudiar el signo de V' en los intervalos



Como V' es polinomio de 2° grado con coef. de x^2 negat. y raíces 0 y 20.
Por tanto,

Para $x = 20$ hay un máximo relativo que es el absoluto de V porque a la izquierda de 20 la función es creciente y a la derecha decreciente.

Para $x = 20 \rightarrow y = 30 - 20 = 10$

Las dimensiones de la cartulina para que el cilindro engendrado sea de volumen máximo son: base 20 cm y altura 10 cm.