

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Dos matrices A y B satisfacen las siguientes igualdades:

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula A y B .
b) Calcula la matriz X sabiendo que $A X A = B$

Solución:

a) Debemos resolver el sistema matricial:

$$\begin{cases} A + B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{Sumando ambas ecuaciones,} \quad 2A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Despejando } B \text{ en la 1ª ecuación: } B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Buscamos una matriz X / $A X A = B$

Veamos si existe A^{-1} ,

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Calculemos A^{-1} ,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente } A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Calculemos la matriz X ,

$A X A = B$, multiplicando por A^{-1} por la izquierda: $A^{-1} A X A = A^{-1} B$, como $A^{-1} A = I$, $I X A = A^{-1} B$, $X A = A^{-1} B$

Multiplicando, ahora, por A^{-1} por la derecha: $X A A^{-1} = A^{-1} B A^{-1}$, luego $X = A^{-1} B A^{-1}$

$$\text{Por tanto, } X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/4 & -11/4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/4 & -11/4 \end{pmatrix}$$