

Problema 2. Cierta empresa de material fotográfico oferta una máquina que es capaz de revelar 15,5 fotografías por minuto. Sin embargo, sus cualidades se van deteriorando con el tiempo de forma que el número de fotografías reveladas por minuto viene dado por la función $f(x)$, donde x es la antigüedad de la máquina en años.

$$f(x) = \begin{cases} 15,5 - 1,1x & 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{5x + 45}{x + 2} & x > 5 \end{cases}$$

- Estudia la continuidad de $f(x)$ en el intervalo $[0, +\infty[$.
- Comprueba que el número de fotografías reveladas por minuto decrece con la antigüedad de la máquina. Justifica que si la máquina tiene más de 5 años revelará menos de 10 fotografías por minuto.
- ¿Es cierto que la máquina nunca revelará menos de 5 fotografías por minuto? ¿Por qué?

Solución:

a) Continuidad de $f(x)$ en $[0, +\infty[$.

Para $0 \leq x < 5$, $f(x) = 15,5 - 1,1x$, polinomio luego continua.

Para $x > 5$, $f(x) = \frac{5x + 45}{x + 2}$, esta función no se puede calcular para $x + 2 = 0$, $x = -2 \notin]5, +\infty[$. Por tanto, para $x > 5$ el cociente siempre se puede calcular, luego continua.

Veamos para $x = 5$,

$$a) f(5) = 15,5 - 1,1 \cdot 5 = 10$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (15,5 - 1,1x) = 10 \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{5x + 45}{x + 2} = \frac{5 \cdot 5 + 45}{5 + 2} = \frac{70}{7} = 10 \end{array} \right\} = 10$$

$$c) f(5) = \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 10$$

Se cumplen las tres condiciones de continuidad, $f(x)$ es continua en $x = 5$.

Por tanto, $f(x)$ es continua en $[0, +\infty[$.

b) Estudiemos la monotonía de $f(x)$.

Tenemos en cuenta que $f(x)$, por el apartado a), es continua en $[0, +\infty[$.

Calculamos $f'(x)$.

$$f'(x) = \begin{cases} -1,1 & 0 < x < 5 \\ \frac{5(x+2) - (5x+45) \cdot 1}{(x+2)^2} & x > 5 \end{cases} = \begin{cases} -1,1 & 0 < x < 5 \\ \frac{10x + 10 - 5x - 45}{(x+2)^2} & x > 5 \end{cases} = \begin{cases} -1,1 & 0 < x < 5 \\ \frac{-35}{(x+2)^2} & x > 5 \end{cases}$$

Entre 0 y 5, $f'(x)$ es negativa

A partir de 5, $f'(x)$ es un cociente cuyo denominador está elevado al cuadrado (positivo) y el numerador es negativo, luego $f'(x)$ es negativa.

Por tanto $f'(x)$ es negativa en $]0, 5[\cup]5, +\infty[$. Por tanto $f(x)$ es decreciente en su dominio.

Luego, podemos concluir que el número de fotografías decrece con la antigüedad de la máquina.

Para justificar que si la máquina tiene más de 5 años revelará menos de 10 fotografías por minuto, realizamos los siguientes cálculos:

$$f(5) = \{\text{obtenido en a)}\} = 10 \text{ y como la función } f(x) \text{ es decreciente, para } x > 5 \rightarrow f(x) < 10$$

Por tanto, si la máquina tiene más de 5 años revelará menos de 10 fotografías por minuto.

c) ¿Es cierto que la máquina nunca revelará menos de 5 fotografías por minuto? ¿Por qué?

$$\text{Calculemos } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+45}{x+2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 = 5$$

Como $f(x)$ es decreciente y su límite es 5, esto quiere decir que el número de fotografías que revela la máquina, a medida que pasa el tiempo, se va acercando a 5 pero se mantiene por encima de 5. Es decir, la máquina nunca revelará menos de 5 fotografías por minuto.

Otra forma de resolver los apartados b) y c) es representar gráficamente la función.

Primera rama

x	$15'5 - 1'1x$
0	15'5
5	$15'5 - 1'1 \cdot 5 = 10$

Segunda rama

x	$\frac{5x+45}{x+2}$
5	$\frac{10}{10} = 1$
10	$\frac{95}{12} = 7'9$
15	$\frac{120}{17} = 7'1$
20	$\frac{145}{22} = 6'6$

es una hipérbola con
asíntota vertical

$$x + 2 = 0$$

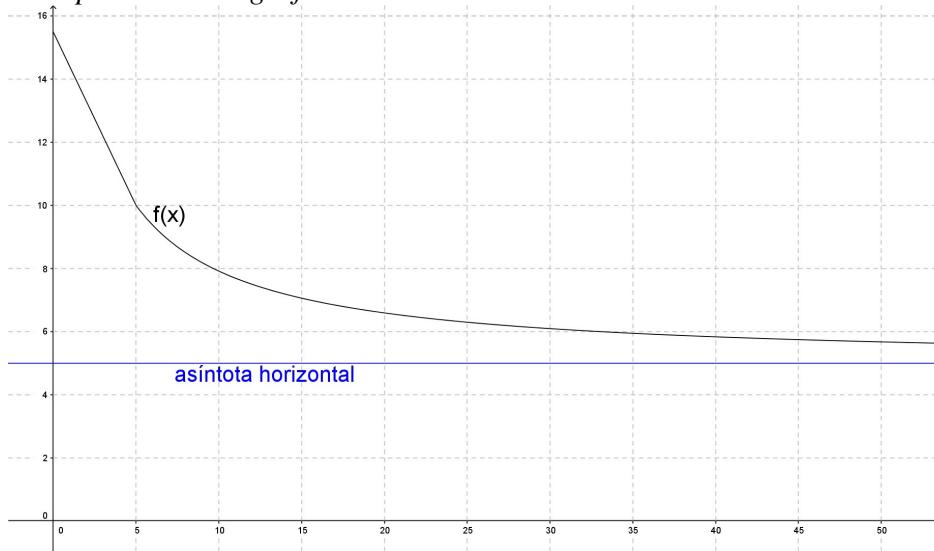
$$x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x+45}{x+2} = \frac{-35}{0} = \infty \rightarrow x = -2 \text{ es a.v. } \{ \notin \} 5, + \infty \{ \}$$

asíntota horizontal

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+45}{x+2} = \{ \text{calculado antes} \} = 5 \rightarrow y = 5 \text{ es a.h.}$$

La representación gráfica será:



A partir de la representación se comprueba que:

- El número de fotografías reveladas por minuto decrece con la antigüedad de la máquina.
- Si la máquina tiene más de 5 años revelará menos de 10 fotografías por minuto.
- La máquina nunca revelará menos de 5 fotografías por minuto.