

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1}$, se pide:

- Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)
- La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores. (2 puntos)

Solución:

a) *Dominio,*

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 5}{0^2 - 1} = -5 \rightarrow (0, -5)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow 2x^2 - 3x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{-31}}{4} \text{ sin solución}$$

Sólo hay un punto de corte con los ejes coordenados, el (0, -5).

b) *Asíntota horizontal y asíntota vertical.*

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2$$

, la asíntota horizontal es $y = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$$

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles A.V. $x = -1$ y $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{2(-1)^2 - 3(-1) + 5}{(-1)^2 - 1} = \frac{10}{0} = \infty \rightarrow x = -1 \text{ es A.V.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 5}{1^2 - 1} = \frac{4}{0} = \infty \rightarrow x = 1 \text{ es A.V.}$$

La asíntota horizontal es $y = 2$ y las asíntotas verticales son $x = -1$ y $x = 1$.

c) Monotonía.

Estudiamos el signo de $f'(x)$

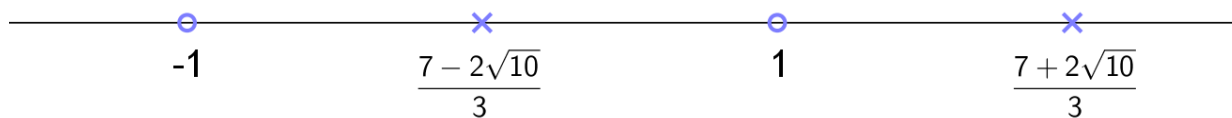
$$f'(x) = \frac{(4x-3) \cdot (x^2-1) - (2x^2-3x+5) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{4x^3 - 4x - 3x^2 + 3 - 4x^3 + 6x^2 - 10x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2 - 14x + 3}{(x^2-1)^2}$$

Obtenemos las raíces del numerador y denominador,

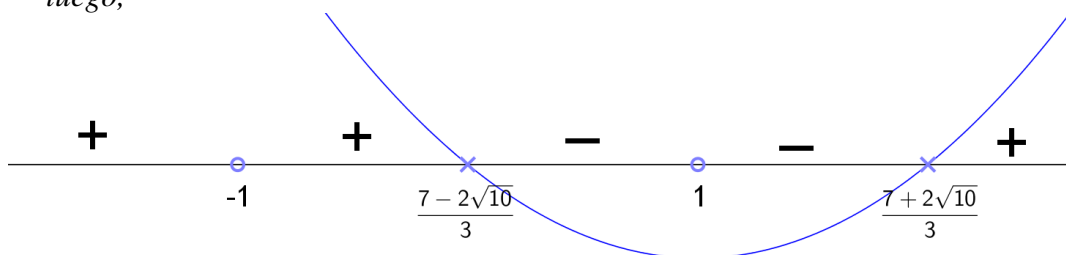
$$3x^2 - 14x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{14 \pm 4\sqrt{10}}{6} = \frac{7 \pm 2\sqrt{10}}{3} = \begin{cases} x_1 = \frac{7+2\sqrt{10}}{3} \cong 4'4415... \\ x_2 = \frac{7-2\sqrt{10}}{3} \cong 0'2251... \end{cases}$$

$$(x^2-1)^2 = 0 \rightarrow x^2-1=0 \rightarrow \{\text{resuelta en a)}\} x = \pm 1$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los intervalos: $(\{-1, 1\} \notin \text{Dom } f(x))$



El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces $\frac{7 \pm 2\sqrt{10}}{3}$, luego,



Por tanto,

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{7-2\sqrt{10}}{3}\right) \cup \left(\frac{7+2\sqrt{10}}{3}, +\infty\right)$ y

$f(x)$ es decreciente en $\left(\frac{7-2\sqrt{10}}{3}, 1\right) \cup \left(1, \frac{7+2\sqrt{10}}{3}\right)$

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x = \frac{7-2\sqrt{10}}{3}$ hay un máximo local y en $x = \frac{7+2\sqrt{10}}{3}$ hay un mínimo local.

$$x = \frac{7-2\sqrt{10}}{3} \rightarrow y = -4'662277... \quad \text{Máximo local} \left(\frac{7-2\sqrt{10}}{3}, -4'662277...\right) \cong (0'225, -4'662)$$

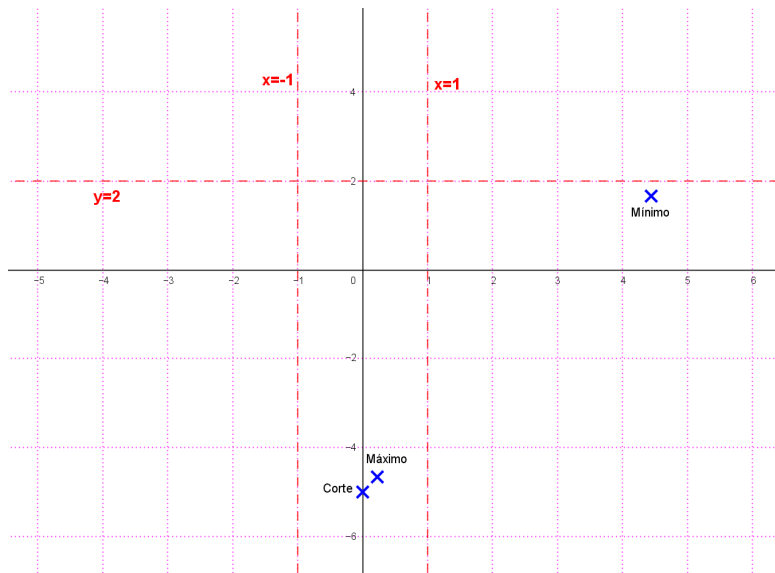
$$x = \frac{7+2\sqrt{10}}{3} \rightarrow y = 1'662277... \quad \text{Mínimo local} \left(\frac{7+2\sqrt{10}}{3}, 1'662277...\right) \cong (4'441, 1'662)$$

e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados $(0, -5)$, máximo local en $(0'225, -4'662)$, mínimo local en $(4'441, 1'662)$; a.h. $y = 2$, a.v. $x = -1$ y $x = 1$.

Representando gráficamente esta información:



Para completar la representación veamos la posición de la curva respecto de sus asíntotas.

A.H. $y = 2$

$$\text{En } -\infty, \quad x = -1000 \quad \rightarrow \quad y = \frac{2(-1000)^2 - 3(-1000) + 5}{(-1000)^2 - 1} = 2'003...$$

$$\text{En } +\infty, \quad x = 1000 \quad \rightarrow \quad y = \frac{2 \cdot 1000^2 - 3 \cdot 1000 + 5}{1000^2 - 1} = 1'997...$$



A.V. $x = -1$,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} \stackrel{x=-1^-}{=} \frac{+}{+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} \stackrel{x=-1^+}{=} \frac{+}{-} = -\infty$$



A.V. $x = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} \stackrel{x=1^-}{=} \frac{+}{-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} \stackrel{x=1^+}{=} \frac{+}{+} = +\infty$$



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de $f(x)$ es:

