Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:
a) Dominio,

$$x^2-x-1=0 \rightarrow x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1'62 \\ x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=-0'62\end{cases}$$

$$\rightarrow \quad Dom\ f(x)=\Re-\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \rightarrow f(0)=\frac{3\cdot 0^2-4\cdot 0-4}{0^2-0-1}=\frac{-4}{-1}=4 \rightarrow (0,4)$$

$$f(x)=0 \rightarrow \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1}=0;\quad 3x^2-4x-4=0 \quad \rightarrow x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3\cdot(-4)}}{2\cdot 3}=\frac{4\pm 8}{6}=$$

$$=\begin{cases} x_1=\dfrac{4+8}{6}=2 & (2,0) \\ x_2=\dfrac{4-8}{6}=\dfrac{-2}{3} & \left(\dfrac{-2}{3},0\right)\end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: (0 , 4), $\left(\dfrac{-2}{3},0\right)$ ***y (2 , 0).***

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.
Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}3=3$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}3=3$$

, *la asíntota horizontal es y = 3.*

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que hay dos posibles A.V. $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ *y* $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\lim_{x\to\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1} =$$

$$\lim_{x\to\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1} =$$

sustituir el valor de x *en cada límite sería un cálculo largo y engorroso.*

Para estos valores de x *sabemos que el denominador es cero (son las raíces del polinomio del denominador) y el numerador es distinto de cero (las raíces del numerador son 2 y* $\frac{-2}{3}$*). Por tanto*

$$\lim_{x\to\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1} = \frac{\neq 0}{0} = \infty \quad \to \quad x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad es\ A.V.$$

$$\lim_{x\to\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1} = \frac{\neq 0}{0} = \infty \quad \to \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad es\ A.V.$$

La asíntota horizontal es* $y = 3$ *y las asíntotas verticales son $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *y* $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$**.**

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{(6x-4)\cdot(x^2-x-1)-(3x^2-4x-4)\cdot(2x-1)}{(x^2-x-1)^2} =$$

$$= \frac{6x^3-6x^2-6x-4x^2+4x+4-(6x^3-3x^2-8x^2+4x-8x+42)}{(x^2-x-1)^2} = \frac{6x^3-10x^2-2x+4-6x^3+11x^2+4x-4}{(x^2-x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2+2x}{(x^2-x-1)^2}$$

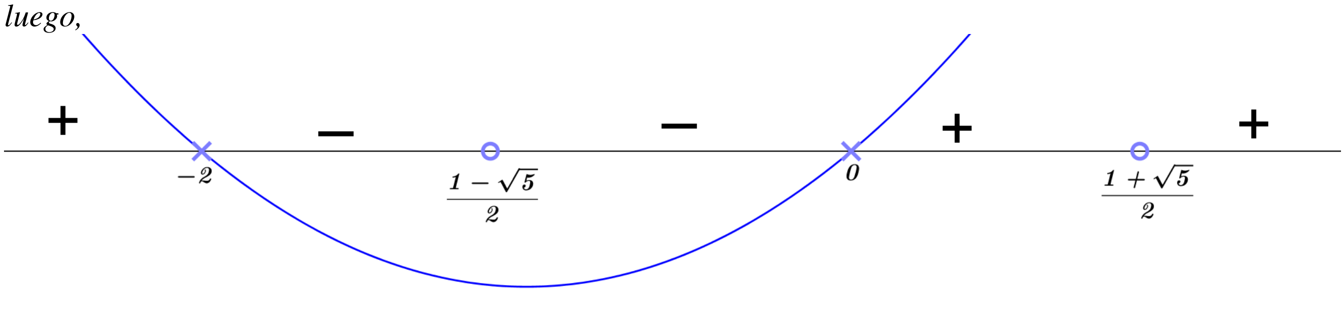
Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

$$x^2+2x=0 \quad \to \quad x(x+2)=0 \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x+2=0; \quad x=-2 \end{array} \right.$$

$$(x^2-x-1)^2 = 0 \quad \to \quad x^2-x-1=0 \quad \to \quad \{resuelta\ en\ a)\} \quad x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad y \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ *en los intervalos:* $\left(\left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\} \notin Dom\ f(x) \right)$

El denominador de $f'(x)$ *está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de* $f'(x)$ *sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de* x^2 *positivo y raíces* -2 *y* 0*, luego,*



Por tanto,

$$f(x) \text{ es creciente en } \left(-\infty,-2\right)\cup\left(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right) \quad y$$

$$f(x) \text{ es decreciente en } \left(-2,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)$$

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x = -2$ hay un máximo local y en $x = 0$ hay un mínimo local.

$$x=-2 \quad f(-2)=\frac{3\cdot(-2)^2 4\cdot(-2)-4}{(-2)^2-(-2)-1}=\frac{16}{5}=3'2 \quad\rightarrow\quad \text{Máximo local } \left(-2,\frac{16}{5}\right)$$

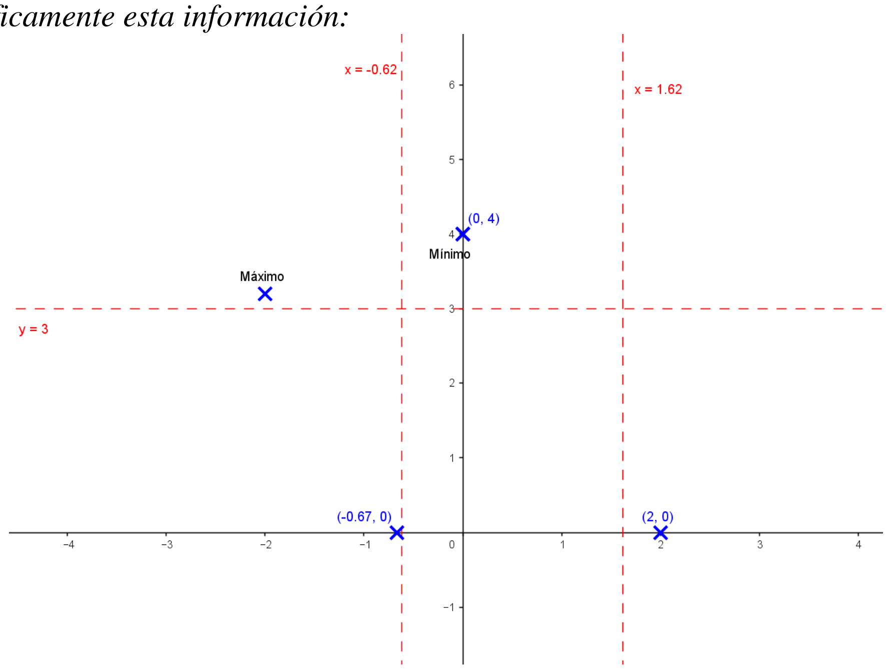
$x = 0$ $\quad f(0) = 4$ *{calculado en el apartado a)}* $\rightarrow$ *Mínimo local* $(0 , 4)$

e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados $(0 , 4)$, $\left(\frac{-2}{3},0\right)$ *y* $(2 , 0)$, *mínimo local en* $(0, 4)$, *máximo local en* $\left(-2,\frac{16}{5}\right)$; *a.h.* $y = 3$, *a.v.* $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *y* $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Representando gráficamente esta información:



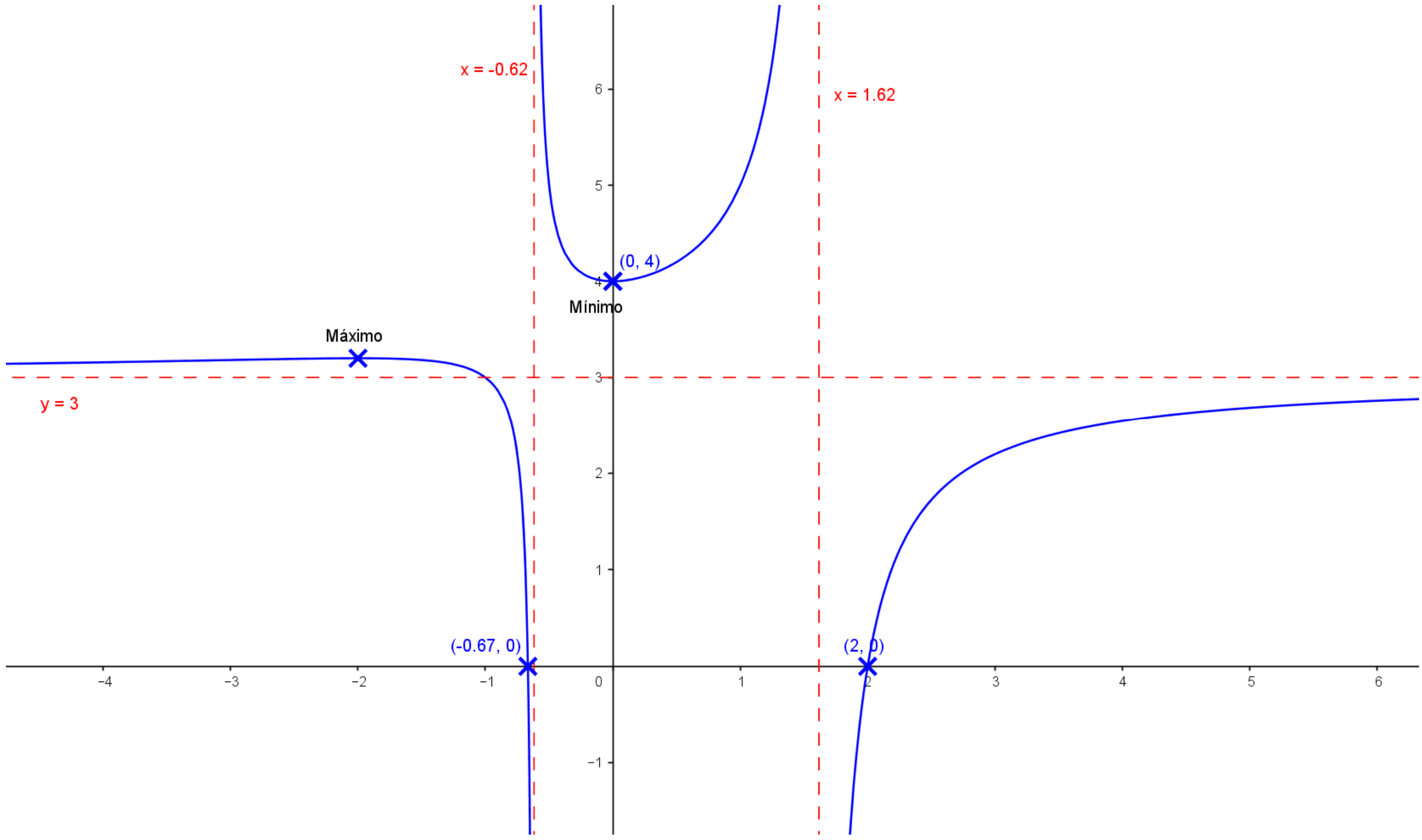
Si con esta información la representación no queda definida, podemos obtener la posición de la curva respecto de sus asíntotas.

A.H. $y = 3$

$$En\ -\infty, \quad x=-1000 \quad\rightarrow\quad y=\frac{3\cdot(-1000)^2 4\cdot(-1000)-4}{(-1000)^2-(-1000)-1}=3'00099...$$

$$En\ +\infty, \quad x=1000 \quad\rightarrow\quad y=\frac{3\cdot 1000^2 4\cdot 1000-4}{1000^2-1000-1}=2'998...$$

Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es:



x = -0.62
x = 1.62
(0, 4)
Mínimo
Máximo
y = 3
(-0.67, 0)
(2, 0)