Problema 1. A. Consideramos las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\quad y\quad D=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sabiendo que, si K es una matriz, K^t representa su matriz traspuesta, se pide:

a) Calcular $M = A\,B^t\,C - D$. *(0,75 puntos)*

b) Justificar si M es invertible y, si lo es, hallar su inversa. *(0,75 puntos)*

c) Hallar M^2 y M^8. *(0,5 puntos)*

d) Justificar si son invertibles las matrices $C\,C^t$ y $C^t\,C$. *(0,5 puntos)*

e) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $A^t + X\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t = \left(C^t\,B\right)^t$. *(1 punto)*

Solución:

a) Calcular $M = A\,B^t\,C - D$.

$$A\,B^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+0\cdot 1+2\cdot 0 \\ -1\cdot 1+3\cdot 1+1\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A\,B^t\,C=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A\,B^t\,C-D=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución: $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Justificar si M es invertible y, si lo es, hallar su inversa.

Como $|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1-2=-3\neq 0 \;\rightarrow\; \exists\, M^{-1}$

Cálculo de M^{-1},

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad M^{-1}=\frac{1}{|M|}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Solución: M es invertible y $M^{-1}=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.

c) Hallar M^2 *y* M^8.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M^2\, M^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1/9 \end{pmatrix}$$

$$M^8 = M^4\, M^4 = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/81 & 0 \\ 0 & 1/81 \end{pmatrix}$$

Solución: $M^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ *y* $M^8 = \begin{pmatrix} 1/81 & 0 \\ 0 & 1/81 \end{pmatrix}$.

d) Justificar si son invertibles las matrices $C\,C^t$ *y* $C^t\,C$.

$C\,C^t$, *C es 1x2 y* C^t *es 2x1* $\rightarrow$ $C\,C^t$ *es 1x1*

$$C\,C^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$$

$\left|C\,C^t\right| = |5| = 5 \neq 0 \quad \rightarrow \quad C\,C^t$ *es invertible.*

$C^t\,C$, C^t *es 2x1 y C es 1x2* $\rightarrow$ $C^t\,C$ *es 2x2*

$$C^t\,C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\left|C^t\,C\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad C^t\,C$ *no es invertible.*

Solución: $\boldsymbol{C\,C^t}$ ***es invertible y*** $\boldsymbol{C^t\,C}$ ***no es invertible .***

e) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $A^t + X\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t = \left(C^t\,B\right)^t$.

Efectuado operaciones:

$$A^t + X\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t = \left(C^t\,B\right)^t;\quad A^t + X\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \left(C^t\,B\right)^t;\quad X\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \left(C^t\,B\right)^t - A^t$$

Según obtuvimos en el apartado a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = M$ *y en el b) calculamos que* $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

La expresión final anterior queda; $X\,M = \left(C^t\,B\right)^t - A^t$

Despejemos X, multiplicamos por la derecha por M^{-1},

$$X\,M\,M^{-1} = \left[\left(C^t\,B\right)^t - A^t\right]M^{-1};\quad X\,I = \left[\left(C^t\,B\right)^t - A^t\right]M^{-1};\quad X = \left[\left(C^t\,B\right)^t - A^t\right]M^{-1};$$

Efectuemos los cálculos para obtener X

$$C^t\ B=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\2 & 2 & 0\end{pmatrix};\quad \left(C^t\ B\right)^t=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\\0 & 0\end{pmatrix};\quad \left(C^t\ B\right)^t-A^t=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 3\\2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3\\1 & -1\\-2 & -1\end{pmatrix}$$

$$X=\left[\left(C^t\ B\right)^t-A^t\right]M^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 3\\1 & -1\\-2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3 & 2/3\\1/3 & -1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3} & 0\cdot\frac{2}{3}-3\cdot\frac{1}{3}\\1\cdot\frac{1}{3}-1\cdot\frac{1}{3} & 1\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\frac{1}{3}\\-2\cdot\frac{1}{3}-1\cdot\frac{1}{3} & -2\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}.$