Problema 1. B. Consideramos las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&5&2\\1&3&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&4&2\\2&1&0\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&2&2\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

a) Calcula el producto $A\,C^t$, siendo C^t la matriz traspuesta de C. *(0,75 puntos)*
b) Calcula la inversa de la matriz $B-A$. *(1,25 puntos)*
c) Obtén la matriz X que verifica la ecuación $X^t A + C = X^t B$, siendo X^t la matriz traspuesta de X. *(1,5 puntos)*

Solución:

a) Calcula el producto $A\,C^t$.

$$A\,C^t=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&5&2\\1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&0\\0&2&1\\1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+1\cdot0+0\cdot1&2\cdot3+1\cdot2+0\cdot2&2\cdot0+1\cdot1+0\cdot0\\3\cdot1+5\cdot0+2\cdot1&3\cdot3+5\cdot2+2\cdot2&3\cdot0+5\cdot1+2\cdot0\\1\cdot1+3\cdot0+1\cdot1&1\cdot3+3\cdot2+1\cdot2&1\cdot0+3\cdot1+1\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&8&1\\5&23&5\\2&11&3\end{pmatrix}$$

Solución: $A\,C^t=\begin{pmatrix}2&8&1\\5&23&5\\2&11&3\end{pmatrix}$

b) Calcula la inversa de la matriz $B-A$.

$$B-A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&4&2\\2&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1&0\\3&5&2\\1&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-3&-1&0\\1&-2&-1\end{pmatrix}$$

Calculemos $/B-A/$, $|B-A|=\begin{vmatrix}-1&1&1\\-3&-1&0\\1&-2&-1\end{vmatrix}=-1+6+1-3=3\neq0\ \rightarrow\ \exists\,(A-B)^{-1}$

Cálculo de la inversa de $(B-A)$,

$$(B-A)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-3&-1&0\\1&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-1&0\\-2&-1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-3&0\\1&-1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-3&-1\\1&-2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&1\\-2&-1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-1&1\\1&-1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-1&1\\1&-2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&1\\-1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-1&1\\-3&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-1&1\\-3&-1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&7\\1&0&1\\1&3&4\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}1&-3&7\\-1&0&-1\\1&-3&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{traspuesta}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-3&0&-3\\7&-1&4\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad(B-A)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-3&0&-3\\7&-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3&-1/3&1/3\\-1&0&-1\\7/3&-1/3&4/3\end{pmatrix}$$

Solución: $$(B-A)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 7/3 & -1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

c) ¿Matriz X? / X verifica la ecuación $X^t A + C = X^t B$.

Efectuemos operaciones en la expresión anterior (teniendo en cuenta que conocemos $(B - A)^{-1}$).

$C = X^t B - X^t A$; $C = X^t (B - A)$; multiplicando por $(B - A)^{-1}$ por la derecha,

$C (B - A)^{-1} = X^t (B - A) (B - A)^{-1}$; $C (B - A)^{-1} = X^t I$; $C (B - A)^{-1} = X^t \rightarrow X^t = C (B - A)^{-1}$.

$$X^t = C\,(B-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 5 \\ 11 & -5 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8/3 & -2/3 & 5/3 \\ 11/3 & -5/3 & 5/3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Y \quad X=\left(X^t\right)^t=\begin{pmatrix} 8/3 & 11/3 & -1 \\ -2/3 & -5/3 & 0 \\ 5/3 & 5/3 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución: $$X=\begin{pmatrix} 8/3 & 11/3 & -1 \\ -2/3 & -5/3 & 0 \\ 5/3 & 5/3 & -1 \end{pmatrix}.$$