Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2}$$

Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(0,5 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(0,5 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(0,5 puntos)*

Solución:

a) Dominio,

$$x^2 + x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{array} \right. \quad \rightarrow$$

$$Dom \quad f(x) = \Re - \{-2, 1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad f(0) = \frac{3 \cdot 0^2 - 27}{0^2 + 0 - 2} = \frac{27}{2} = 13'5 \quad \rightarrow \quad (0, 13'5)$$

$$f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = 0; \quad 3x^2 - 27 = 0; \quad 3x^2 = 27; \quad x^2 = \frac{27}{3}; \quad x^2 = 9; \quad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \quad \rightarrow$$

$$(-3, 0) \quad y \quad (3, 0)$$

Dom f(x) = ℜ ~{– 2, 1} y

los puntos de corte con los ejes coordenados son: (0 , 13´5), (– 3 , 0) y (3 , 0).

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} 3 = 3,$$

la asíntota horizontal es y = 3.

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que las posibles a.v. son x = – 3 y x = 3.

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \frac{3(-2)^2 - 27}{(-2)^2 + (-2) - 2} = \frac{-15}{0} = \infty \quad \rightarrow \quad x = -2 \quad es\ a.v.$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \frac{3 \cdot 1^2 - 27}{1^2 + 1 - 2} = \frac{-24}{0} = \infty \quad \rightarrow \quad x = 1 \quad es\ a.v.$$

La asíntota horizontal es y = 3 y las asíntotas verticales x = – 2 y x = 1.

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

$$f(x)=\frac{3x^2-27}{x^2+x-2}$$

$$f'(x)=\frac{6x\cdot\left(x^2+x-2\right)-\left(3x^2-27\right)\cdot(2x+1)}{\left(x^2+x-2\right)^2}=\frac{6x^3+6x^2-12x-\left(6x^3+3x^2-54x-27\right)}{\left(x^2+x-2\right)^2}=\frac{3x^2+42x+27}{\left(x^2+x-2\right)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

$$3x^2+42x+27=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-42\pm\sqrt{42^2-4\cdot 3\cdot 27}}{2\cdot 3}=\frac{-42\pm 12\sqrt{10}}{6}=-7\pm 12\sqrt{10}=$$

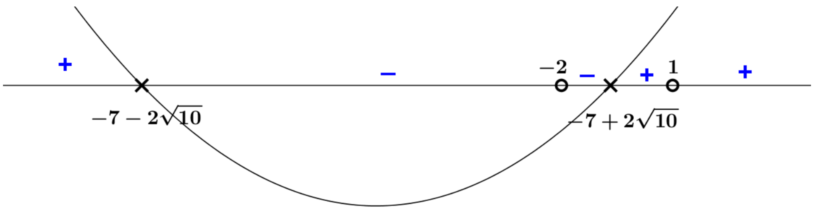
$$=\left\langle \begin{array}{l} x_1=-7+12\sqrt{10}\cong -0'6754 \\ x_2=-7-12\sqrt{10}\cong -13'3246 \end{array}\right.$$

$$\left(x^2+x-2\right)^2=0 \quad\rightarrow\quad x^2+x-2=0 \quad\rightarrow\quad \{resuelta\ en\ a)\} \quad x=-2\ y\ 1\notin Dom\ f(x)$$

El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, siempre será positivo.

El signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y con raíces las obtenidas.

Gráficamente:



Por tanto, ***f(x) es creciente en*** $\left(-\infty,-7-2\sqrt{10}\right)\cup\left(-7-2\sqrt{10},1\right)\cup(1,+\infty)$

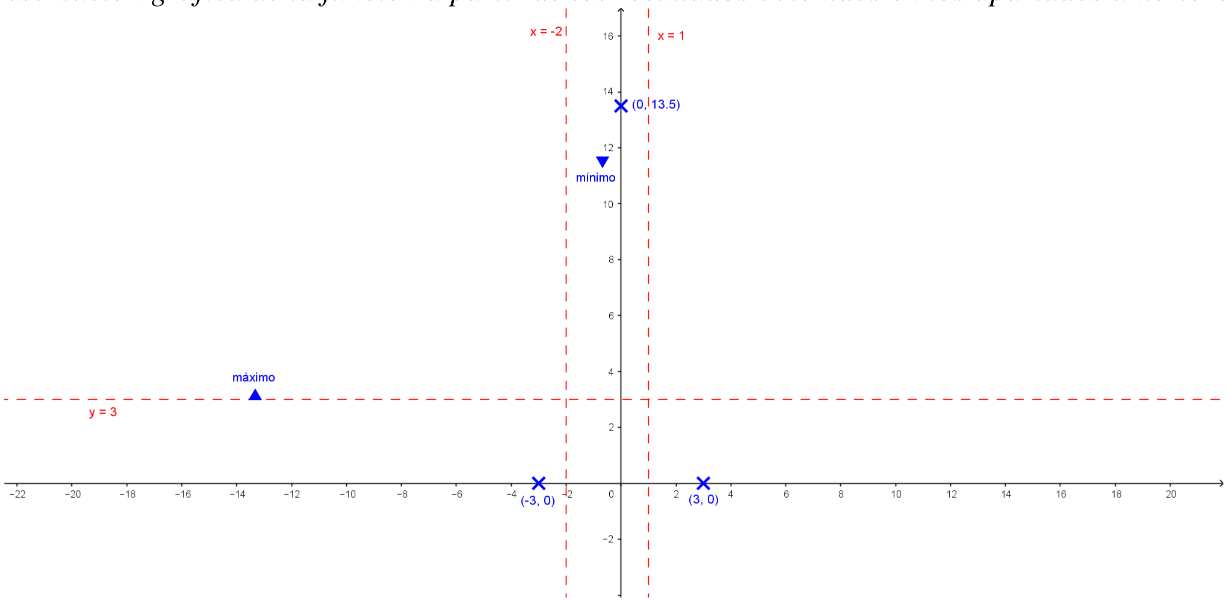
y decreciente en $\left(-7-2\sqrt{10},-2\right)\cup\left(-2,-7+2\sqrt{10}\right)$**.**

Del estudio de la monotonía deducimos que tiene un máximo local en $x=-7-2\sqrt{10}$ y un mínimo local en $x=-7+2\sqrt{10}$.

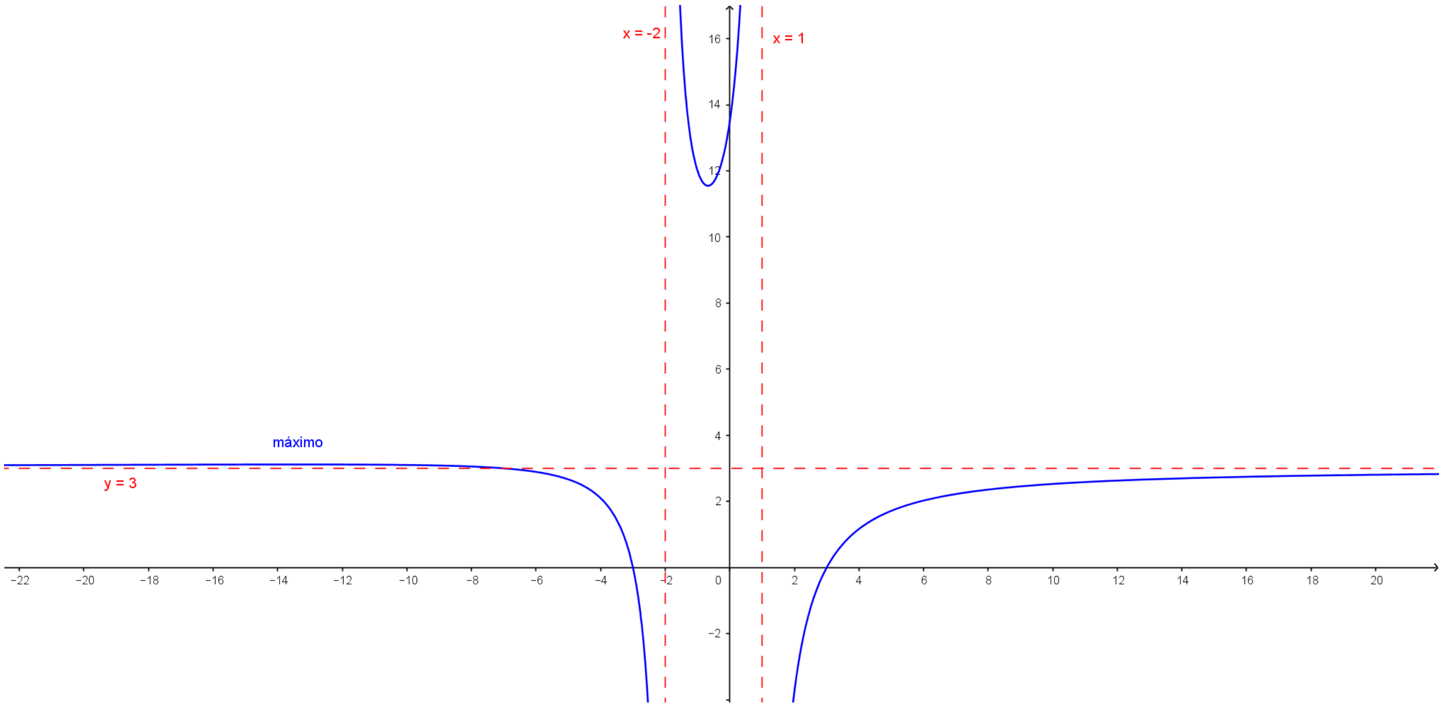
$x=-7-2\sqrt{10}\cong -13'3246$, $\quad f(x)=\dfrac{3\left(-13'3246\right)^2-27}{\left(-13'3246\right)^2+\left(-13'3246\right)-2}\cong 3'1170$, ***f(x) tiene un máximo local en (– 13´3246 , 3´1170).***

$x=-7+2\sqrt{10}\cong -0'6754$, $\quad f(x)=\dfrac{3\left(-0'6754\right)^2-27}{\left(-0'6754\right)^2+\left(-0'6754\right)-2}\cong 11'5497$, ***f(x) tiene un mínimo local en (– 0´6754 , 11´5497).***

d) Representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.



Teniendo en cuenta los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). La representación será:



Ampliando la representación alrededor del máximo: