

**Problema 2. A.** Una empresa que fabrica neumáticos para coches ha estudiado su desgaste, medido en una escala de 0 a 1, en función del tiempo de uso. La empresa fabrica dos tipos de neumáticos: A y B. Para un neumático A, su desgaste  $D_A$  tras  $x$  meses de uso, para  $x$  entre 0 y 50, viene dado por la función  $D_A(x)$ . Por su parte, el desgaste  $D_B$  para un neumático B tras  $x$  meses de uso, para  $x$  entre 0 y 50, viene dado por la función  $D_B(x)$ .

$$D_A(x) = \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} \quad y \quad D_B(x) = \frac{x^2}{3000}$$

- Determina el número de meses para el cual el desgaste es el mismo para los dos tipos de neumáticos. (1 punto)
- Determina para qué intervalo de meses el desgaste es menor para el neumático A y para qué intervalo de meses el desgaste es menor para el B. (1 punto)
- Calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático A, y calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el B. (1,5 puntos)

*Solución:*

*Del enunciado sabemos que:*

$$D_A(x) = \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} \quad 0 \leq x \leq 50 \quad y \quad D_B(x) = \frac{x^2}{3000} \quad 0 \leq x \leq 50, \quad \text{siendo } x \text{ meses de uso.}$$

a) ¿x? /  $D_A(x) = D_B(x)$

$$\frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} = \frac{x^2}{3000}; \quad \frac{30 + 29x}{3000} = \frac{x^2}{3000}; \quad 30 + 29x = x^2; \quad x^2 - 29x - 30 = 0 \rightarrow$$

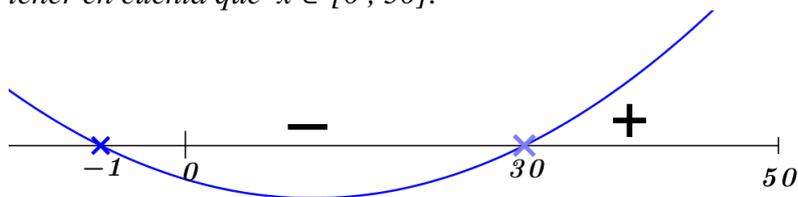
$$\rightarrow x = \frac{-(-29) \pm \sqrt{(-29)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2 \cdot 1} = \frac{29 \pm 31}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{29 + 31}{2} = 30 \in [0, 50] \\ x_2 = \frac{29 - 31}{2} = -1 \notin [0, 50] \end{cases}$$

**Solución:** el desgaste es el mismo para los dos tipos de neumáticos tras 30 meses de uso.

b) ¿x? /  $D_A(x) < D_B(x)$

$$\frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} < \frac{x^2}{3000}; \quad \frac{30 + 29x}{3000} < \frac{x^2}{3000}; \quad 30 + 29x < x^2; \quad x^2 - 29x - 30 > 0$$

Resolvemos la inecuación de 2º grado mediante la representación de  $y = x^2 - 29x - 30$  que es una parábola con coeficiente de  $x^2$  positivo y raíces (obtenidas en el apartado anterior)  $-1$  y  $30$ . Debemos tener en cuenta que  $x \in [0, 50]$ .



Por lo tanto  $D_A(x) < D_B(x)$  para  $30 < x \leq 50$  y  $D_A(x) > D_B(x)$  para  $0 \leq x < 30$

**Solución:** el desgaste es menor para el neumático A en el intervalo de meses  $(30, 50]$  y el desgaste es menor para el neumático B en el intervalo de meses  $[0, 30)$

c) *Calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático A.*

$$D_A(x) < D_B(x) \text{ para } 30 < x \leq 50$$

$$\text{El cálculo del área pedida será: } X = \int_{30}^{50} [D_B(x) - D_A(x)] dx$$

$$D_B(x) - D_A(x) = \frac{x^2}{3000} - \left( \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} \right) = \frac{x^2}{3000} - \frac{1}{100} - \frac{29x}{3000} = \frac{x^2 - 30 - 29x}{3000} = \frac{x^2 - 29x - 30}{3000}$$

$$\begin{aligned} X &= \int_{30}^{50} \frac{x^2 - 29x - 30}{3000} dx = \frac{1}{3000} \int_{30}^{50} (x^2 - 29x - 30) dx = \frac{1}{3000} \left[ \frac{x^3}{3} - 29 \frac{x^2}{2} - 30x \right]_{30}^{50} = \\ &= \frac{1}{3000} \left[ \left( \frac{50^3}{3} - 29 \frac{50^2}{2} - 30 \cdot 50 \right) - \left( \frac{30^3}{3} - 29 \frac{30^2}{2} - 30 \cdot 30 \right) \right] = \frac{1}{3000} \left[ \frac{11750}{3} - (-4950) \right] = \frac{133}{45} \approx 2'9556 \end{aligned}$$

**Solución:** *el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático A es  $\frac{133}{45}$  u.a.  $\approx 2'9556$  u.a.*

*Calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático B*

$$D_B(x) < D_A(x) \text{ para } 0 \leq x < 30$$

$$\text{El cálculo del área pedida será: } Y = \int_0^{30} [D_A(x) - D_B(x)] dx$$

$$D_A(x) - D_B(x) = \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} - \frac{x^2}{3000} = \frac{30 + 29x - x^2}{3000}$$

$$\begin{aligned} Y &= \int_0^{30} \frac{30 + 29x - x^2}{3000} dx = \frac{1}{3000} \int_0^{30} (30 + 29x - x^2) dx = \frac{1}{3000} \left[ 29 \frac{x^2}{2} + 30x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{30} = \\ &= \frac{1}{3000} \left[ \left( 29 \frac{30^2}{2} + 30 \cdot 30 - \frac{30^3}{3} \right) - \left( 29 \frac{0^2}{2} + 30 \cdot 0 - \frac{0^3}{3} \right) \right] = \frac{1}{3000} [4950] = \frac{33}{20} = 1'65 \end{aligned}$$

**Solución:** *el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático B es  $\frac{33}{20}$  u.a. = 1'65 u.a.*