Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1+x^2}{x(2x+4)+2}$$

Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(0,5 puntos)*

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(0,5 puntos)*

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*

d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(1 punto)*

Solución:

Arreglemos la expresión de la función,

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1+x^2}{x(2x+4)+2}=\frac{1}{2}-\frac{1+x^2}{2x^2+4x+2}=\frac{1}{2}-\frac{1+x^2}{2(x^2+2x+1)}=\frac{(x^2+2x+1)-(1+x^2)}{2(x^2+2x+1)}=$$

$$=\frac{x^2+2x+1-1-x^2}{2(x^2+2x+1)}=\frac{2x}{2(x^2+2x+1)}=\frac{x}{x^2+2x+1}$$

a) Dominio,

$$x^2+2x+1=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm 0}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \quad\rightarrow\quad Dom\ \ f(x)=\Re-\{-1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \quad\rightarrow\quad f(0)=\frac{0}{0^2+2\cdot 0+1}=\frac{0}{1}=0 \quad\rightarrow\quad (0\,,0)$$

$$f(x)=0 \quad\rightarrow\quad \frac{x}{x^2+2x+1}=0;\quad x=0 \quad\rightarrow\quad (0\,,0)$$

El único punto de corte es (0 , 0).

Dom f(x) = $\Re$ ~{– 1} y el punto de corte con los ejes coordenados es: (0 , 0).

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

, *la asíntota horizontal es y = 0.*

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que la posible a.v. es x = – 1.

$$\lim_{x\to-1}\frac{x}{x^2+2x+1}=\frac{-1}{(-1)^2+2\cdot(-1)+1}=\frac{-1}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=-1 \quad es\ a.v.$$

La asíntota horizontal es y = 0 y la asíntota vertical x = – 1.

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

$$f(x)=\frac{x}{x^2+2x+1}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(x^2+2x+1\right)-x\cdot(2x+2)}{\left(x^2+2x+1\right)^2}=\frac{x^2+2x+1-2x^2-2x}{\left(x^2+2x+1\right)^2}=\frac{-x^2+1}{\left(x^2+2x+1\right)^2}=$$

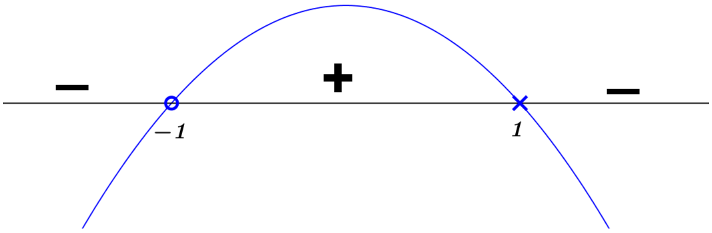
Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

$$-x^2+1=0;\quad 1=x^2;\quad x=\pm\sqrt{1}=\left\langle\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\notin Dom\ f(x)\end{array}\right.$$

$$\left(x^2+2x+1\right)^2=0\quad\rightarrow\quad x^2+2x+1=0\quad\rightarrow\quad\{resuelta\ en\ a)\}\quad x=-1\notin Dom\ f(x)$$

El denominador de $f'(x)$ *está elevado al cuadrado, siempre será positivo.*
El signo de $f'(x)$ *sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de* x^2 *negativo y con raíces* -1 *y* 1*.*

Gráficamente:



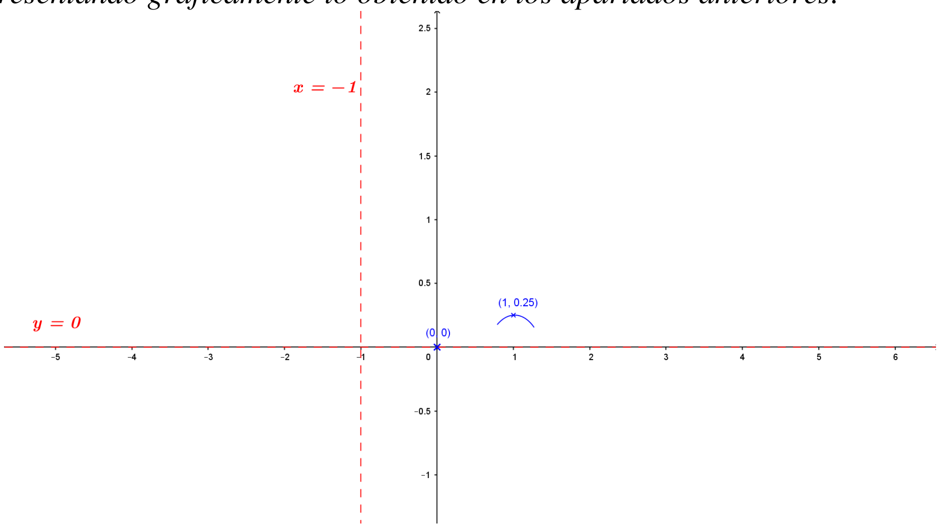
Por tanto, ***f(x) es decreciente en*** $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ ***y creciente en*** $(-1,1)$***.***

Del estudio de la monotonía deducimos que sólo tiene un máximo local en $x = 1$ $\{x=-1\notin Dom\,f(x)\}$

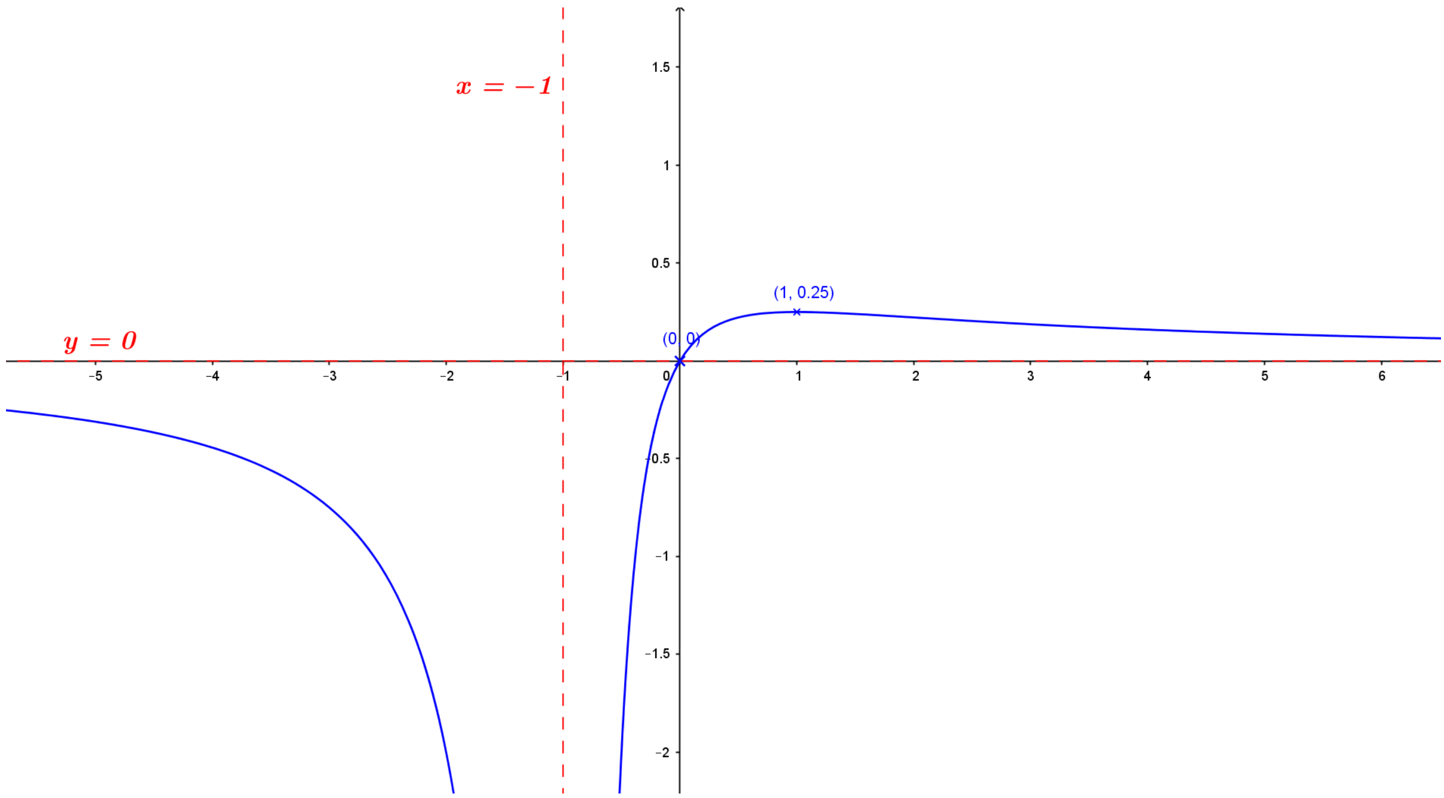
$$x=1,\quad f(1)=\frac{1}{1^2+2\cdot 1+1}=\frac{1}{4},$$ ***f(x) tiene un máximo local en*** $(1, ¼)$***.***

d) Representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Representando gráficamente lo obtenido en los apartados anteriores:



También sabemos que la función es decreciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ *y creciente en* $(-1,1)$*.*
La representación será:



Si con los datos obtenidos no viésemos la representación, podemos obtener otros puntos de la función.

$$f(-5)=\frac{-5}{(-5)^2+2\cdot(-5)+1}=-0'3125 \qquad f(-1'1)=\frac{-1'1}{(-1'1)^2+2\cdot(-1'1)+1}=-110$$

$$f(-0'9)=\frac{-0'9}{(-0'9)^2+2\cdot(-0'9)+1}=-90 \qquad f(5)=\frac{5}{5^2+2\cdot 5+1}=0'138$$