

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz X que verifica $AXB = 2C$

Solución:

Para despejar la matriz X debemos efectuar, en la expresión $AXB = 2C$, las siguientes operaciones:

- multiplicar por la izquierda por A^{-1} : $A^{-1}AXB = A^{-1}2C$, como $A^{-1}A = I$, queda $XB = A^{-1}2C$
- multiplicar por la derecha por B^{-1} : $XB B^{-1} = A^{-1}2C B^{-1}$, como $B B^{-1} = I$, queda $X = A^{-1}2C B^{-1}$

Por tanto para calcular la matriz X necesitamos calcular las inversas de las matrices A y B .

Cálculo de A^{-1} :

1) Cálculo de $|A|$,

$$|A| = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0, \text{ como no es nulo podemos calcular } A^{-1}$$

2) Cálculo de A^{-1}

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{* \frac{1}{-4}} \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Cálculo de B^{-1} :

1) Cálculo de $|B|$,

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0, \text{ como no es nulo podemos calcular } B^{-1}$$

2) Cálculo de B^{-1}

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{* \frac{1}{-4}} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Luego,

$$\begin{aligned} X = A^{-1}2CB^{-1} &= \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$