

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Los beneficios anuales $B(x)$, en miles de euros, previstos por una empresa para los próximos años vienen dados por la siguiente función, donde x representa el número de años a partir del actual:

$$B(x) = \frac{25x}{x^2 + 16}$$

- a) ¿Cuántos años han de transcurrir para que la empresa obtenga el máximo beneficio y cuál es el valor de dicho beneficio? Justifica que es máximo.
 b) ¿Puede esta empresa tener pérdidas algún año? ¿Por qué?

Solución:

a)

Como x representa el número de años a partir del actual, x tomará valores mayores o iguales que 0.

En la definición de $B(x)$ tenemos como denominador la expresión $x^2 + 16$ que es distinta de cero para cualquier valor de x .

Por lo tanto el dominio de la función $B(x)$ son los reales no negativos. Teniendo en cuenta esta restricción busquemos el máximo de $B(x)$.

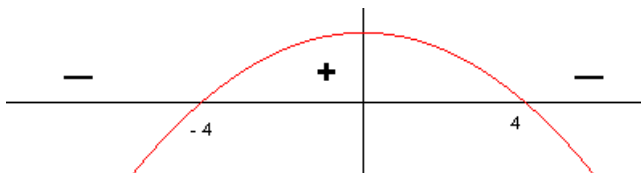
Empezamos realizando el cálculo como si el dominio de $B(x)$ fueran todos los números reales.

$$B'(x) = \frac{25(x^2 + 16) - 2x \cdot 25x}{(x^2 + 16)^2} = \frac{25x^2 + 400 - 50x^2}{(x^2 + 16)^2} = \frac{-25x^2 + 400}{(x^2 + 16)^2}$$

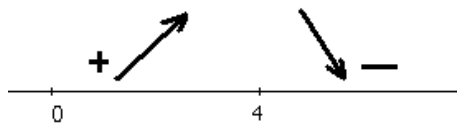
$$B'(x) = 0 \rightarrow \frac{-25x^2 + 400}{(x^2 + 16)^2} = 0 \rightarrow -25x^2 + 400 = 0$$

$$\begin{aligned} 25x^2 &= 400 \\ x^2 &= \frac{400}{25} = 16 \\ x &= \pm\sqrt{16} = \pm 4 \end{aligned}$$

En $B'(x)$ el signo está determinado por el numerador (el denominador es un polinomio elevado al cuadrado, luego siempre positivo). El numerador es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo, luego el signo de $B'(x)$ será,



Como el dominio de $B(x)$ son los números no negativos, consideramos el signo de $B'(x)$ en este dominio,



Por lo tanto en $x = 4$ $B(x)$ presenta un máximo relativo que además es el absoluto ya que a la izquierda de $x=4$ $B(x)$ es creciente y a la derecha es decreciente.

$$\text{Para } x = 4 \quad B(x) = \frac{25 \cdot 4}{4^2 + 16} = \frac{100}{32} = 3'125$$

Solución: para que la empresa obtenga el máximo beneficio han de transcurrir 4 años, al cabo de los cuales obtendrá un beneficio de 3125 €.

b)

La empresa tendrá pérdidas cuando $B(x)$ sea negativo.

Los valores que puede tomar la variable x son no negativos, por lo tanto el numerador de $B(x)$, $25x$, es no negativo. El denominador de $B(x)$, $x^2 + 16$, es positivo para cualquier valor de x . En consecuencia:

$$\forall x \in \text{Dom}(B(x)) \quad B(x) \geq 0$$

Es decir, la empresa nunca tendrá pérdidas.

Otra forma de resolver este apartado es haciendo una representación gráfica aproximada de $B(x)$.

Estudiamos los siguientes apartados:

Máximo relativo (4 , 3'125) (obtenido en el apartado anterior).

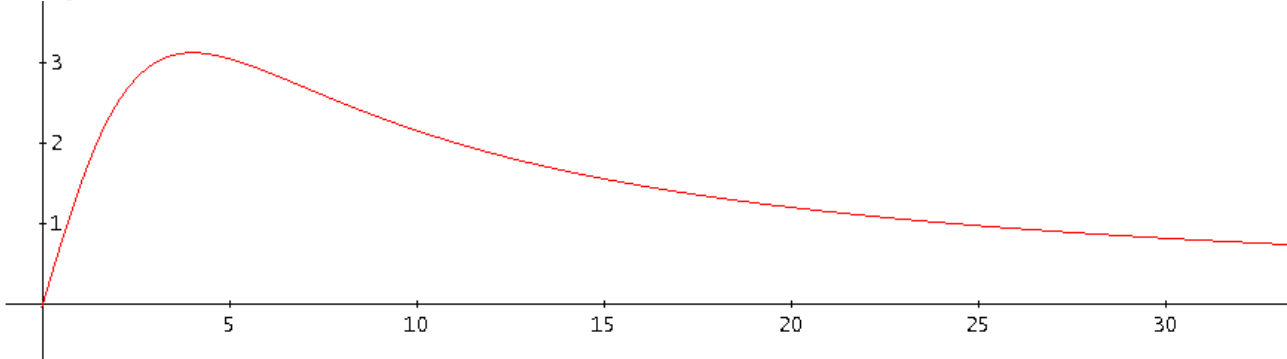
Cortes con los ejes,

$$\left\{ \begin{array}{l} x=0 \rightarrow y = \frac{25 \cdot 0}{0^2 + 16} = 0 \quad (0,0) \\ y=0 \rightarrow \frac{25x}{x^2 + 16} = 0 \rightarrow 25x = 0 \rightarrow x = 0 \quad (0,0) \end{array} \right.$$

Asíntota,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{25x}{x^2 + 16} = 0 \rightarrow y = 0 \quad A.H. \text{ en } +\infty$$

La representación será:



Como los valores que toma la función $B(x)$ nunca son negativos, la empresa no tiene pérdidas.