

OPCIÓN A

PROBLEMA 3. Se sabe que $p(B/A) = 0,9$, $p(A/B) = 0,2$ y $p(A) = 0,1$.

- Calcula $p(A \cap B)$ y $p(B)$
- ¿Son independientes los sucesos A y B ? ¿Por qué?
- Calcula $p(A \cup \bar{B})$, donde \bar{B} representa el suceso complementario de B .

Solución:

De los datos del problema, conocemos:

$$(1) p(B/A) = 0,9 \rightarrow (2) \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = 0,9$$

$$(3) p(A/B) = 0,2 \rightarrow (4) \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = 0,2$$

$$(5) p(A) = 0,1$$

a) Calculemos $p(A \cap B)$ y $p(B)$

$$\text{A partir de las expresiones (2) y (5)} \quad \frac{p(A \cap B)}{0,1} = 0,9 \rightarrow p(A \cap B) = 0,09 \quad (6)$$

$$\text{A partir de las expresiones (4) y (6)} \quad \frac{0,09}{p(B)} = 0,2 \rightarrow p(B) = \frac{0,09}{0,2} = 0,45$$

b) Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Sustituyendo los valores de las probabilidades: $0,09 = 0,1 \cdot 0,45 = 0,045$ falso

Por lo tanto A y B no son independientes.

c)

$$p(A \cup \bar{B}) = p(A) + p(\bar{B}) - p(A \cap \bar{B})$$

Calculemos las tres probabilidades de la parte derecha.

Ya conocemos el valor de $p(A) = 0,1$

$$p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - 0,45 = 0,55$$

La última probabilidad la obtenemos de la siguiente forma: llamando E al suceso seguro, sabemos que

$E = B \cup \bar{B}$ luego, $A = A \cap E = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ por lo que

$$p(A) = p[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})] = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) - p[(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B})] =$$

$$\text{como } (A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = A \cap B \cap \bar{B} = A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$= p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) - p(\emptyset) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) - 0 = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$$

$$\text{Luego } p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$$

Sustituyendo las probabilidades conocidas queda:

$$0,1 = 0,09 + p(A \cap \bar{B}) \rightarrow p(A \cap \bar{B}) = 0,1 - 0,09 = 0,01$$

$$\text{Finalmente } p(A \cup \bar{B}) = 0,1 + 0,55 - 0,01 = 0,64$$