

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Calcular A^{-1} .
 b) Determina la matriz X tal que $AX = A + B$.

Solución:

a) A^{-1} .

Calculamos el determinante de la matriz A ,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (F_2 - F_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Calculamos A^{-1} ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{array}{c|c|c} 3 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Y, finalmente, } A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & -5/3 & -1/3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

b) Determina la matriz X tal que $AX = A + B$.

Multiplicamos la expresión anterior por A^{-1} por la izquierda,

$$A^{-1}AX = A^{-1}(A + B); \quad IX = A^{-1}A + A^{-1}B; \quad X = I + A^{-1}B$$

En primer lugar, calculamos $A^{-1}B$

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 8/3 & -5/3 & -1/3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \cdot 0 - \frac{5}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 2 & -\frac{8}{3} - \frac{5}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 1 & \frac{8}{3} \cdot 2 + \frac{5}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0 \\ -1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & -1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 & -\frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 & \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7/3 & -9/3 & 21/3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1/3 & 0 & 3/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7/3 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1/3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$