

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. El departamento de análisis financiero de una consultora determina que la rentabilidad $R(x)$, en miles de euros, de cierta inversión, en función de la cantidad invertida en miles de euros, x , viene dada por la siguiente expresión:

$$R(x) = -0,01x^2 + 0,1x + 1, \quad x > 0$$

- ¿Cuántos euros conviene invertir para maximizar la rentabilidad? ¿Cuál será dicha rentabilidad máxima?
- Determina la función que proporciona la rentabilidad media (es decir, el cociente entre la rentabilidad y la cantidad invertida) de dicha inversión y estudia la evolución de dicha rentabilidad media en función de la cantidad invertida.

Solución:

- Busquemos el máximo de $R(x)$.
 x y $R(x)$ son miles de euros.

Por definición, $\text{Dom } R(x) = (0, +\infty)$ {intervalo abierto}

$$R'(x) = -0,02x + 0,1$$

$$-0,02x + 0,1 = 0 \rightarrow -0,02x = -0,1 \rightarrow x = \frac{-0,1}{-0,02} = 5$$

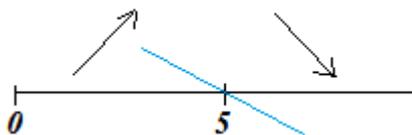
Estudiamos el signo de $R'(x)$. $R'(x)$, gráficamente, es una línea recta de pendiente negativa que pasa por $(5, 0)$, luego:



Por tanto, el signo de $R'(x)$ es:



Y $R(x)$ es creciente a la izquierda de 5 y decreciente a la derecha.



Luego en $x = 5$ hay un máximo relativo, pero como a la izquierda de $x = 5$ la función es creciente y a la derecha decreciente este máximo relativo es el absoluto de $R(x)$.

$$\text{Para } x = 5, \quad R(5) = -0,01 \cdot 5^2 + 0,1 \cdot 5 + 1 = 1,25 \quad \{x = 5 \text{ miles de euros; } R(5) = 1,25 \text{ miles de euros}\}$$

Finalmente, para maximizar la rentabilidad conviene invertir 5000€ y la rentabilidad máxima será de 1250€.

- La función de rentabilidad media (RM) será: $RM(x) = \frac{R(x)}{x} = \frac{-0,01x^2 + 0,1x + 1}{x} = -0,01x + 0,1 + \frac{1}{x}, \quad x > 0$

Para estudiar la evolución de $RM(x)$ en función de x , estudiémosla para representarla gráficamente.

Por definición, $\text{Dom } RM(x) = (0, +\infty)$

Puntos de corte con ejes coordenados,

$$y=0 \rightarrow -0'01x+0'1+\frac{1}{x}=0 \rightarrow -0'01x^2+0'1x+1=0 \rightarrow x=\frac{-0'1\pm\sqrt{0'1^2-4\cdot(-0'01)\cdot1}}{2\cdot(-0'01)}=$$
$$=\frac{-0'1\pm\frac{\sqrt{5}}{10}}{-0'02}=\begin{cases} x_1=\frac{-0'1+\frac{\sqrt{5}}{10}}{-0'02}=-6'... \notin \text{Dom } RM(x) \\ x_2=\frac{-0'1-\frac{\sqrt{5}}{10}}{-0'02}=16'1803 \end{cases} \rightarrow \text{Punto de corte } (16'1803, 0)$$

Monotonía,

$$RM'(x)=-0'01-\frac{1}{x^2}, \text{ por lo tanto } \forall x \in \text{Dom } RM(x), \quad RM'(x) < 0$$

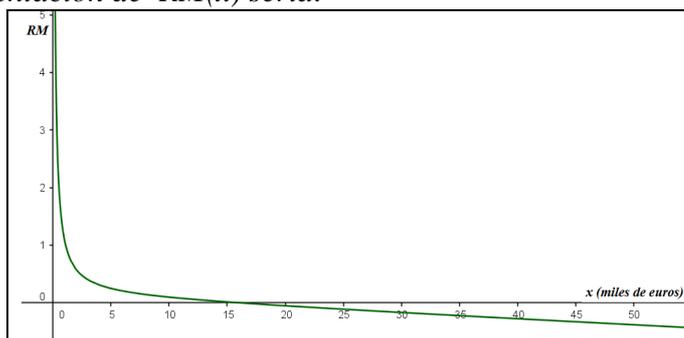
Luego $RM(x)$ es decreciente en su dominio.

Asíntotas,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} RM(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-0'01x+0'1+\frac{1}{x}\right) = 0+0'1+\frac{1}{0} = +\infty \Rightarrow x=0 \text{ es asíntota vertical por la derecha.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} RM(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-0'01x+0'1+\frac{1}{x}\right) = -\infty+0'1+\frac{1}{+\infty} = -\infty+0 = -\infty \Rightarrow \text{No hay asíntota horizontal}$$

La representación de $RM(x)$ sería:



Por tanto, la rentabilidad media es decreciente y a partir de 16'1803 miles de euros de inversión es negativa.