OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Una empresa produce dos tipos de cerveza artesanal, A y B. La demanda mínima de cerveza tipo A es de 200 litros diarios. La producción de cerveza tipo B es al menos el doble que la de tipo A. La infraestructura de la empresa no permite producir en total más de 900 litros diarios de cerveza. Los beneficios que obtiene por litro de A y B son 2 y 2,5 euros, respectivamente. ¿Cuántos litros diarios se han de producir de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

Solución:

Llamando: x = *litros diarios de cerveza del tipo A*

y = *litros diarios de cerveza del tipo B*

Los datos del problema proporcionan las siguientes restricciones:

"La demanda mínima de cerveza tipo A es de 200 litros diarios" $\rightarrow$ $x \geq 200$

"La producción de cerveza tipo B es al menos el doble que la de tipo A" $\rightarrow$ $y \leq 2\,x$

"La infraestructura de la empresa no permite producir en total más de 900 litros diarios de cerveza" $\rightarrow$ $x + y \leq 900$

Como las variables x e y representan hectáreas de cultivo deben ser mayores o iguales a cero.

El beneficio viene dada por la función: $z = 2\,x + 2´5\,y$

El problema a resolver es:

$$\text{maximizar} \quad z = 2\,x + 2´5\,y$$

$$s.a. \quad \begin{cases} x \geq 200 \\ y \leq 2\,x \\ x + y \leq 900 \\ x,\, y \geq 0 \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$(a)\quad x \geq 200$

$x = 200$

x	y
0	200
200	200

¿(0,0) *cumple*?

$0 \geq 200$ *No*

$(b)\quad y \leq 2x$

$y = 2x$

x	y
0	0
300	600

¿(200,0) *cumple*?

$0 \leq 2\,.\,100$

$0 \leq 200$ *No*

$(c)\quad x + y \leq 900$

$x + y = 900$

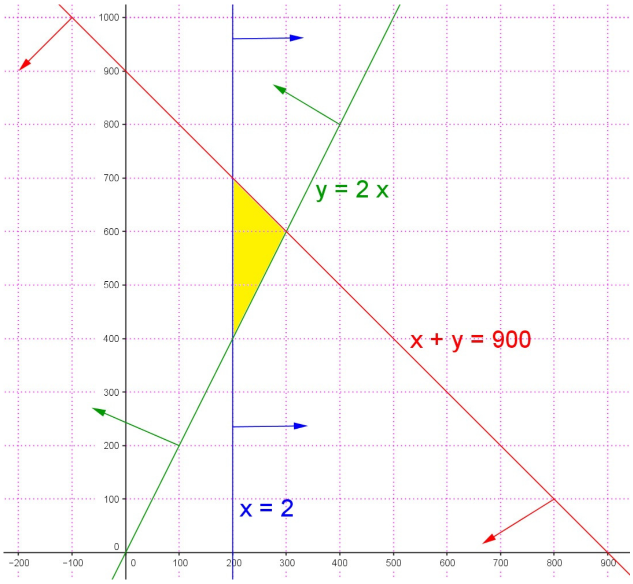
x	y
0	900
900	0

¿(0,0) *cumple*?

$0 + 0 \leq 900$

$0 \leq 900$ *Sí*

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de la zona sombreada.

Los vértices de la región factible los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.
Punto A, corte entre (a) y (c):

$$\begin{cases} x = 200 \\ x + y = 900 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x *en la 2ª ecuación:* $200 + y = 900 \rightarrow y = 900 - 200 = 700$

Luego $A\ (200\ ,\ 700)$

Punto B, corte entre (b) y (c):

$$\begin{cases} y = 2x \\ x + y = 900 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de y *en la 2ª ecuación:*

$x + 2x = 900;\quad 3x = 900;\quad x = \dfrac{900}{3} = 300$

Y, finalmente, $y = 2 \,.\, 300 = 600.$ *Por tanto,* $B\ (300\ ,\ 600)$

Punto C, corte entre (a) y (b):

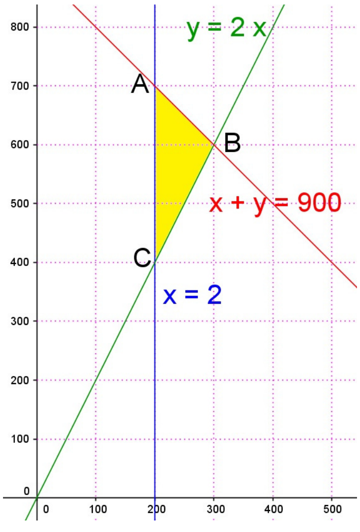
$$\begin{cases} x = 200 \\ y = 2x \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x *en la 2ª ecuación:* $y = 2.\ 200 = 400$

Por tanto, $C\ (200\ ,\ 400)$

Los vértices de la región factible son:

$A\ (200,\ 700),\ B\ (300\ ,\ 600)$ *y* $C\ (200\ ,\ 400).$



El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los extremos de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	$z = 2x + 2'5y$	
200 , 700	2 . 200 + 2´5 . 700 = 2150	*máximo*
300 , 600	2 . 300 + 2´5 . 600 = 2100	
200 , 400	2 . 200 + 2´5 . 400 = 1400	

El máximo se alcanza en el punto (200 , 700)

Por tanto, para maximizar el beneficio hay que producir, diariamente, 200 l de cerveza del tipo A y 700 l de cerveza del tipo B. De esta forma el beneficio máximo será de 2150€.