Problema 1. Determina las matrices X e Y que satisfacen las relaciones siguientes:

$$X + 2\,Y = A^t + B$$
$$X - Y = A\,B$$

donde A^t representa la matriz traspuesta de A y las matrices A y B son

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Calculemos $C = A^t + B$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \to \quad A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = A^t + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculemos $D = A\,B$

$$D = A\,B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-2+12 & 2-4+4 & -2 \\ 8+3 & -4+6 & 3 \\ 4+6 & -2+2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 11 & 2 & 3 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para encontrar las matrices X e Y, debemos resolver el sistema: $\begin{cases} X + 2Y = C \\ X - Y = D \end{cases}$

Lo resolvemos por reducción.

Multiplicando la segunda ecuación por 2, $\begin{cases} X + 2Y = C \\ 2X - 2Y = 2D \end{cases}$

Sumando las dos ecuaciones, $3\,X = C + 2\,D \quad \to \quad X = \frac{1}{3}(C + 2D)$

Partimos del sistema inicial, cambiamos de signo la segunda ecuación: $\begin{cases} X + 2Y = C \\ -X + Y = -D \end{cases}$

Sumando las dos ecuaciones, $3\,Y = C - D \quad \to \quad Y = \frac{1}{3}(C - D)$

Calculemos las matrices X e Y:

$$X = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 11 & 2 & 3 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 4 & -4 \\ 22 & 4 & 6 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 15 & 4 & -3 \\ 21 & 9 & 7 \\ 27 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4/3 & -1 \\ 7 & 3 & 7/3 \\ 9 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 11 & 2 & 3 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -12 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1 & -2/3 & -1 \\ -4 & 1 & -2/3 \\ -1 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 4/3 & -1 \\ 7 & 3 & 7/3 \\ 9 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, las matrices buscadas son:

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & -2/3 & -1 \\ -4 & 1 & -2/3 \\ -1 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$