

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 4. En una empresa se ha comprobado que sus beneficios están relacionados con su inversión en publicidad según la función

$$B(x) = 50000 + 40x - \left(\frac{x}{10}\right)^2,$$

donde x es la inversión en publicidad ($x \geq 0$) y $B(x)$ es el beneficio obtenido, ambos en euros.

- Calcula la cantidad invertida en publicidad que produce un beneficio máximo. ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (4 puntos)
- Calcula los intervalos para la inversión en publicidad en los que los beneficios crecen o decrecen a medida que se invierte en publicidad. (3 puntos)
- ¿Existe un valor para la inversión en publicidad a partir del cual los beneficios obtenidos serían menores que si no se invirtiera nada en publicidad? En caso afirmativo, determínalo. (3 puntos)

Solución:

$$B(x) = 50000 + 40x - \left(\frac{x}{10}\right)^2 = 50000 + 40x - \frac{x^2}{100} \quad x \geq 0$$

a) *Máximo*

$$B'(x) = 40 - \frac{2x}{100} = 40 - \frac{x}{50}$$

$$B'(x) = 0 \rightarrow 40 - \frac{x}{50} = 0; \quad 40 = \frac{x}{50}; \quad x = 2000$$

Estudiamos el signo de $B'(x)$ a ambos lados de $x = 2000$

x	$B'(x) = 40 - \frac{x}{50}$	<i>A la izquierda positivo y a la derecha negativo, en $x = 2000$ hay un máximo relativo que es el absoluto por ser la función $B(x)$ a la izquierda creciente y a la derecha decreciente.</i>
1000	$40 - \frac{1000}{50} = 20$ +	
3000	$40 - \frac{3000}{50} = -20$ -	

$$\text{Para } x = 2000, \quad B(2000) = 50000 + 40 \cdot 2000 - \frac{2000^2}{100} = 90000$$

Para obtener un beneficio máximo hay que invertir 2000€ en publicidad. En este caso el beneficio será de 90000€.

b) *De lo calculado en el apartado anterior obtenemos que $B(x)$ es creciente en el intervalo $(0, 2000)$ y decreciente en $(2000, +\infty)$.*

Por tanto, los beneficios crecen para una inversión entre 0 y 2000 € y decrecen para una inversión de más de 2000 €.

c) ¿x? / $B(x) < B(0)$

$$B(x) = 50000 + 40x - \frac{x^2}{100}$$

$$B(0) = 50000 + 40 \cdot 0 - \frac{0^2}{100} = 50000$$

Resolvamos la inecuación $B(x) < B(0)$

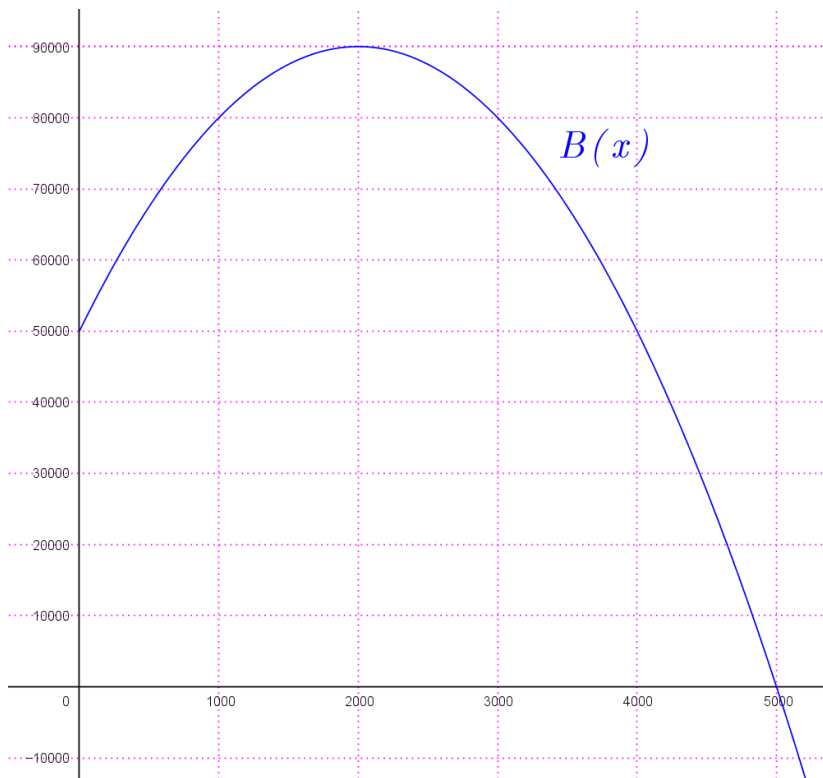
$$50000 + 40x - \frac{x^2}{100} < 50000; \quad 40x - \frac{x^2}{100} < 0; \quad 4000x - x^2 < 0$$

$$4000x - x^2 = 0; \quad x(4000 - x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 4000 - x = 0; \quad x = 4000 \end{cases}$$

Representemos la función $B(x)$.

Lo calculado antes nos dice que $B(x)$ pasa por los puntos $(0, 50000)$ y $(4000, 50000)$.

En el apartado a) hemos obtenido que su máximo es $(2000, 90000)$



Luego para $x > 4000$ $B(x) < 50000$

Por tanto, con una inversión en publicidad superior a 4000€ los beneficios obtenidos son menores que si no se invirtiera nada.