**Problema 2.** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Hallar la matriz $X$ que satisface la ecuación $X^{-1} A + A = B$. *(4 puntos)*

b) Hallar la matriz $Y$ que satisface la ecuación $(A - B)\,Y - A\,Y = I$, donde $I$ representa a la matriz identidad de orden 3 *(4 puntos)*

c) Hallar la matriz $Z$ que satisface la ecuación $A\,Z\,A^{-1} = I$. *(2 puntos)*

*Solución:*

*a)* ¿Matriz $X$? / $X^{-1} A + A = B$.

$X^{-1} A + A = B \;\rightarrow\; X^{-1} A = B - A$; *multiplicando por la izquierda por* $X$: $X\,X^{-1} A = X\,(B - A)$

$\{$*como* $X\,X^{-1} = I\} \;\rightarrow\; I\,A = X\,(B - A) \;\rightarrow\; A = X\,(B - A)$

*Si existe* $(B - A)^{-1} \;\rightarrow$ *multiplicando por la derecha por* $(B - A)^{-1}$: $A\,(B - A)^{-1} = X\,(B - A)\,(B - A)^{-1}$

$\{$*como* $(B - A)\,(B - A)^{-1} = I\} \;\rightarrow\; A\,(B - A)^{-1} = X$

*Cálculos:*

$$B-A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}; \qquad |B-A|=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=1\neq 0 \;\rightarrow\; \exists\,(B-A)^{-1}$$

*Cálculo de la inversa de* $(B - A)$,

$$B-A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \;\rightarrow\; (B-A)^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

*Finalmente*

$$X=A(B-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0+0\cdot 1+(-1)\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot(-1)+(-1)\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot 0+(-1)\cdot 0\\ 0\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot(-1)+0\cdot 1 & 0\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 0\\ 0\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot(-1)+1\cdot 1 & 0\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

***Solución:*** $X=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

*b) ¿Matriz Y? / (A – B) Y – A Y = I*

*Despejemos Y,*

*A Y – B Y – A Y = I;   – B Y = I;   B Y = – I;   si existe $B^{-1}$ entonces, multiplicando por $B^{-1}$ la izquierda*

*$B^{-1}$ B Y = $B^{-1}$ ( – I);   I Y = – $B^{-1}$ I;   Y = – $B^{-1}$*

$$Como \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \exists\, B^{-1}$$

*Cálculo de $B^{-1}$,*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Finalmente: \quad Y = -B^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

***Solución:*** $Y = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

*c) ¿Matriz Z? / A Z $A^{-1}$ = I*

$$Como \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \exists\, A^{-1}$$

*Despejemos Z, multiplicando por $A^{-1}$ por la izquierda: $A^{-1}$ A Z $A^{-1}$ = $A^{-1}$ I;   I Z $A^{-1}$ = $A^{-1}$;   Z $A^{-1}$ = $A^{-1}$; multiplicando por A por la derecha: Z $A^{-1}$ A = $A^{-1}$ A;   Z I = I;   Z = I*

***Solución: Z = I***