Problema 3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:

$$f(x)=\frac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)}=\frac{x^2-3x}{x^2-3x+x+1}=\frac{x^2-3x}{x^2-2x+1}$$

a) Dominio,

$$x^2-2x+1=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{0}}{2}=1 \quad\rightarrow\quad Dom\ \ f(x)=\Re-\{1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \quad\rightarrow\quad f(0)=\frac{0^2-3\cdot 0}{0^2-2\cdot 0+1}=\frac{0}{1}=0 \quad\rightarrow\quad (0,0)$$

$$f(x)=0 \quad\rightarrow\quad \frac{x^2-3x}{x^2-2x+1}=0;\quad x^2-3x=0 \quad\rightarrow\quad x(x-3)=0\left\langle\begin{array}{ll} x=0 \quad\rightarrow & (0,0)\\ x-3=0;\quad x=3 & (3,0)\end{array}\right.$$

Dom f(x) = ℜ ~{1} y los puntos de corte con los ejes coordenados son: (0 , 0) y (3 , 0).

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x}{x^2-2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}1=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x}{x^2-2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}1=1$$

, *la asíntota horizontal es y =1.*

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que la posible a.v. es x = 1.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x}{x^2-2x+1}=\frac{1-3}{1-2+1}=\frac{-2}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=1 \quad es\ a.v.$$

La asíntota horizontal es y = 1 y la asíntota vertical x = 1.

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{(2x-3)\cdot\left(x^2-2x+1\right)-\left(x^2-3x\right)\cdot(2x-2)}{\left(x^2-2x+1\right)^2}=\frac{x^2+2x-3}{\left(x^2-2x+1\right)^2}$$

$$\begin{array}{r} x^2-2x+1 \\ 2x-3 \\ \hline -3x^2+6x-3 \\ 2x^3-4x^2+2x \\ \hline 2x^3-7x^2+8x-3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^2-3x \\ 2x-2 \\ \hline -2x^2+6x \\ 2x^3-6x^2 \\ \hline 2x^3-8x^2+6x \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x^3-7x^2+8x-3 \\ -2x^3+8x^2-6x \\ \hline x^2+2x-3 \end{array}$$

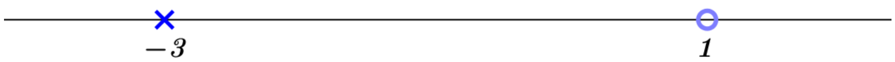
Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

$$x^2+2x-3=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=$$

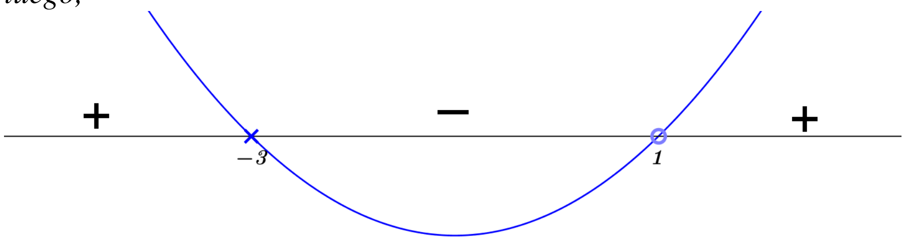
$$=\left\langle \begin{array}{l} x_1=\dfrac{-2+4}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \\ x_2=\dfrac{-2-4}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3 \end{array}\right.$$

$$\left(x^2-2x+1\right)^2=0 \quad\rightarrow\quad x^2-2x+1=0 \quad\rightarrow\quad \{resuelta\ en\ a)\} \quad x=1$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los intervalos: ($\{1\}\notin Dom\ f(x)$)



El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces -3 y 1, luego,



Por tanto,

f(x) es creciente en $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ y
f(x) es decreciente en $(-3, 1)$

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x=-3$ hay un máximo local.

$$x=-3 \quad f(1)=\frac{(-3)^2-3\cdot(-3)}{(-3)^2-2\cdot(-3)+1}=\frac{18}{16}=\frac{9}{8} \quad\rightarrow\quad \text{Máximo local} \quad \left(-3,\frac{9}{8}\right)$$

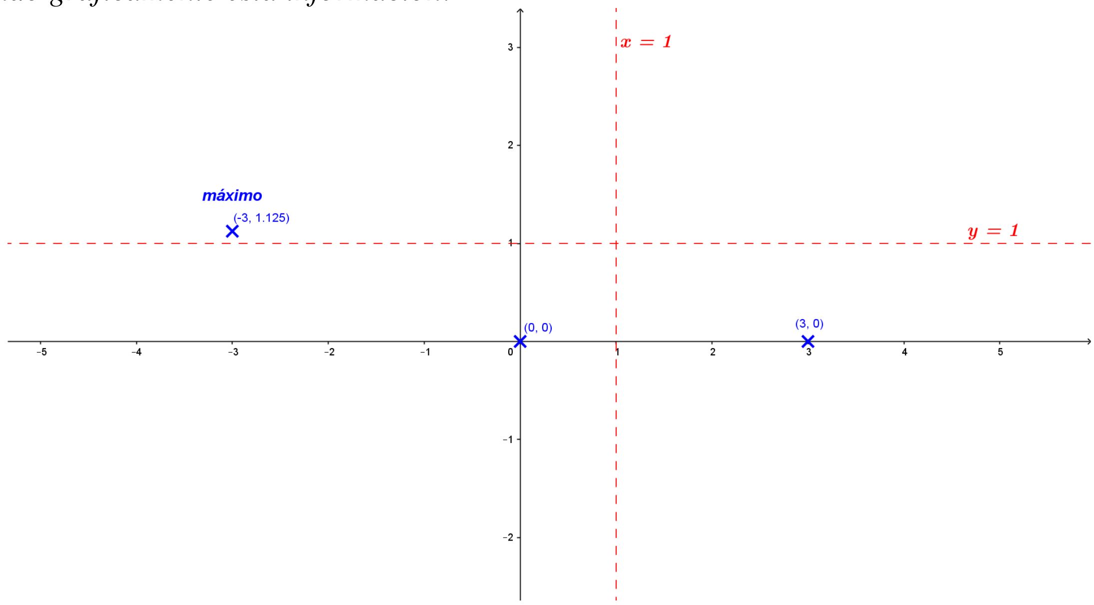
Solución: f(x) sólo tiene un máximo local en $\left(-3,\frac{9}{8}\right)$

e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados (0 , 0) y (3 , 0), máximo local en $\left(-3, \frac{9}{8}\right)$*; a.h. y = 1, a.v. x = 1.*

Representando gráficamente esta información:



Si con esta información la representación no queda definida, podemos obtener la posición de la curva respecto de su asíntota horizontal.

A.H. y = 1

$$En\ -\infty, \quad x=-1000 \quad \rightarrow \quad y=\frac{(-1000)^2-3\cdot(-1000)}{(-1000)^2-2\cdot(-1000)+1}=1'0009\ldots>1$$

$$En\ +\infty, \quad x=1000 \quad \rightarrow \quad y=\frac{1000^2-3\cdot 1000}{1000^2-2\cdot 1000+1}=0'998\ldots<1$$

Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es: