**Problema 4.** Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+a\,x^2+24x & si \quad x\le -1 \\ (x-1)^2+3 & si \quad x>-1 \end{cases}$$

siendo a un número real.

a) Determina el valor de $a$ para que esta función sea continua. *(2 puntos)*

b) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimo locales que tiene esta función en el intervalo $\left(\frac{-9}{2},\frac{-3}{2}\right)$. *(4 puntos)*

c) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje $OX$. *(2 puntos)*

*Solución:*

*a) ¿Valor de a para que f(x) sea continua?*

*Para* $x < -1$ $f(x) = x^3 + a\,x^2 + 24\,x$ *es, independientemente del valor de a, un polinomio luego es continua.*

*Para* $x > -1$ $f(x) = (x-1)^2 + 3$ *es un polinomio luego es continua.*

*El problema para continuidad está en el cambio de definición, es decir, en* $x = -1$.

*Continuidad en* $x = -1$,

*a)* $f(1) = (-1)^3 + a\,(-1)^2 + 24\,(-1) = -1 + a - 24 = a - 25$

*b)* $$\lim_{x\to -1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left(x^3+a\,x^2+24x\right)=(-1)^3+a(-1)^2+24(-1)=a-25 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left[(x-1)^2+3\right]=(-1-1)^2+3=7 \end{cases}$$

*Para que exista el límite* $a-25=7 \quad\rightarrow\quad a=7+25=32$

*c) Para* $32 = 2$ $\quad f(-1) = \lim\limits_{x\to -1} f(x)$

***Solución: para que f(x) sea continua debe ser a = 32.***

*b) Para a = 9, máximos y mínimos locales de f(x) en* $\left(\frac{-9}{2},\frac{-3}{2}\right)=\left(-4'5,-1'5\right)$.

*Como* $(-4'5, -1'5) \subset \{x \le -1\} \rightarrow f(x) = x^3 + 9\,x^2 + 24\,x$

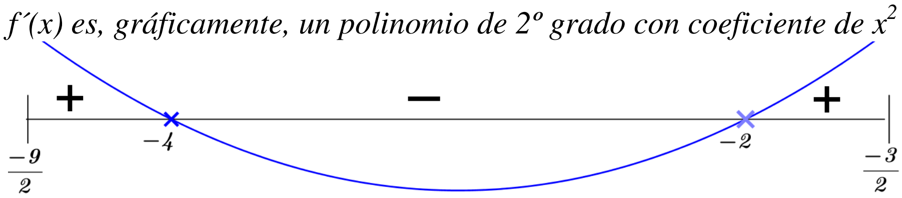
$f'(x) = 3\,x^2 + 18\,x + 24$

*estudiemos el signo de* $f'(x)$

$$3x^2+18x+24=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-18\pm\sqrt{12^2-4\cdot 3\cdot 24}}{2\cdot 3}=\frac{-18\pm 6}{6}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-18+6}{6}=-2 \\ x_2=\dfrac{-18-6}{6}=-4 \end{cases}$$

*Por tanto, debemos estudiar el signo de* $f'(x)$ *en:*


*f´(x) es, gráficamente, un polinomio de 2º grado con coeficiente de* $x^2$ *positivo y raíces* $-4$ *y* $-2$*, luego,*




*En* $x = -4$ *hay un máximo local*
*y*
*en* $x = -2$ *hay un mínimo local*

*Para* $x = -4 \;\rightarrow\; f(-4) = (-4)^3 + 9(-4)^2 + 24(-4) = -16$
*Para* $x = -2 \;\rightarrow\; f(-2) = (-2)^3 + 9(-2)^2 + 24(-2) = -20$

*Solución:* ***para*** $a = 9$ ***los máximos y mínimos locales de f(x) en*** $\left(\frac{-9}{2}, \frac{-3}{2}\right)$ ***son:***

***( – 4 , – 16 ) máximo local y ( – 2 , – 20 ) mínimo local.***

*c) Si a = 0 ¿área de la región delimitada por f(x), x=2, x = 3 y eje OX?*

*Si* $a = 0 \;\rightarrow\; f(x) = \begin{cases} x^3 + 24x & si \;\; x \le -1 \\ (x-1)^2 + 3 & si \;\; x > -1 \end{cases}$

*Entre* $x = 2$ *y* $x = 3$ $f(x) = (x-1)^2 + 3$ *y, además, como* $f(x)$ *es algo al cuadrado más tres:* $f(x) > 0$.
*Por tanto el área pedida la obtenemos mediante el siguiente cálculo:*

$$A = \int_2^3 \left[(x-1)^2 + 3\right] dx$$

$$Cálculo \;\; auxiliar: \quad \int (x-1)^2\, dx = \left\{ cambio \;\; de \; variable \quad \begin{matrix} t = x-1 \\ dt = dx \end{matrix} \right\} \int t^2 dx = \frac{t^3}{3} = \frac{(x-1)^3}{3}$$

$$A = \int_2^3 \left[(x-1)^2 + 3\right] dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3} + 3x\right]_2^3 = \left(\frac{(3-1)^3}{3} + 3\cdot 3\right) - \left(\frac{(2-1)^3}{3} + 3\cdot 2\right) = \frac{8}{3} + 9 - \left(\frac{-1}{3} + 6\right) = \frac{16}{3}$$

*Por tanto,* ***el área de la región pedida es*** $\frac{16}{3}\; u.a.$