

**Problema 6.** Lanzamos un dado de 6 caras bien equilibrado. Si al lanzar el dado obtenemos un número mayor que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda bien construida; pero si al lanzar el dado obtenemos un número menor o igual que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda defectuosa en la que la probabilidad de obtener cara es tres veces mayor que la de obtener cruz.

- a) Si sabemos que en los dos lanzamientos de la moneda hemos obtenido dos caras, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos obtenido un número mayor que 2 al lanzar el dado? (3 puntos)
- b) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “obtener un número menor o igual que 2 al lanzar el dado” y “obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de la moneda”. (4 puntos)
- c) ¿Son independientes los sucesos “obtener un 6 al lanzar el dado” y “obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda”? (3 puntos)

Solución:

Consideramos los siguientes sucesos:

En el dado equilibrado,

$$A = \text{obtener un número mayor que dos} \rightarrow P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$B = \text{obtener un número menor o igual que dos} \rightarrow P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

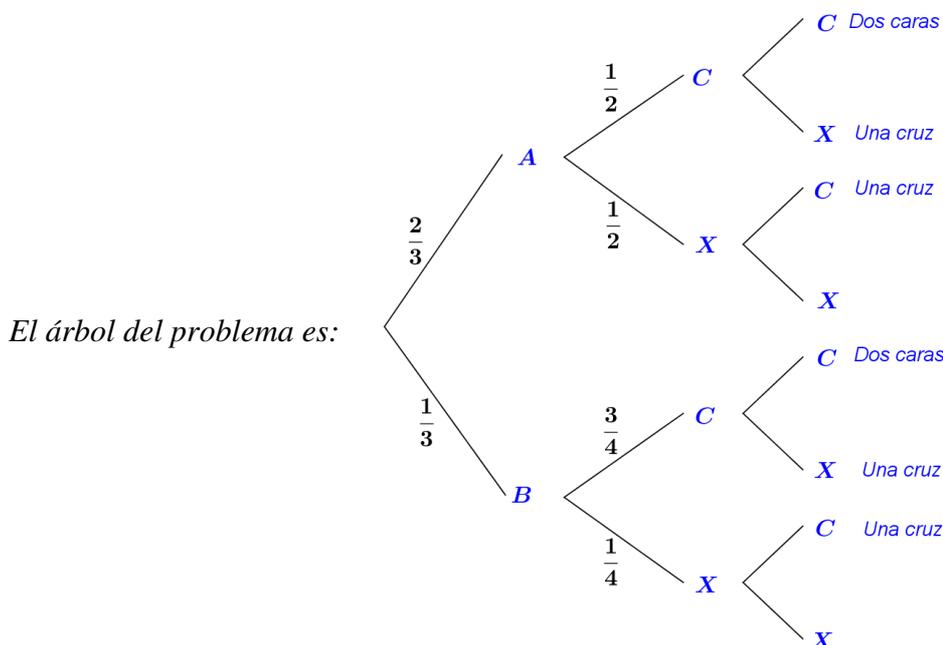
$C = \text{obtener cara}$  y  $X = \text{obtener cruz}$

En la moneda bien construida,  $P(C) = P(X) = \frac{1}{2}$ .

En la moneda defectuosa la probabilidad de obtener cara es tres veces mayor que la de obtener cruz,

$$P(C) = 3P(X) \rightarrow \text{como } P(C) + P(X) = 1 \rightarrow 3P(X) + P(X) = 1 \rightarrow 4P(X) = 1 \rightarrow P(X) = \frac{1}{4}$$

y  $P(C) = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$



- a) Si sabemos que en los dos lanzamientos de la moneda hemos obtenido dos caras, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos obtenido un número mayor que 2 al lanzar el dado?

Llamando  $CC =$  obtener dos caras en los dos lanzamientos de la moneda, la probabilidad pedida es:  $P(A/CC)$

$$P(A/CC) = \frac{P(A \cap CC)}{P(CC)} = \frac{\frac{2}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{3}{4} \frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{3}{16}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{17}{48}} = \frac{8}{17} \cong 0'4706$$

**Solución:**  $P(A/CC) = \frac{8}{17} \cong 0'4706.$

- b) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “obtener un número menor o igual que 2 al lanzar el dado” y “obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de la moneda”

Llamando  $D =$  obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de la moneda

la probabilidad pedida es:  $P(B \cup D)$

$$P(B \cup D) = P(B) + P(D) - P(B \cap D) = \frac{1}{3} + \frac{13}{16} - \frac{5}{16} = \frac{5}{6} \cong 0'8333$$

$$P(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(D) = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{3}{4} \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{3}{4} \right) = \frac{2}{3} \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \frac{15}{16} = \frac{13}{16}$$

$$P(B \cap D) = \frac{1}{3} \left( \frac{3}{4} \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{3} \frac{15}{16} = \frac{5}{16}$$

**Solución:**  $P(B \cup D) = \frac{5}{6} \cong 0'8333.$

- c) ¿Son independientes los sucesos “obtener un 6 al lanzar el dado” y “obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda”?

Llamamos:  $F =$  obtener un 6 al lanzar el dado y  $G =$  obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda.

$F$  y  $G$  serán independientes si  $P(F \cap G) = P(F) \cdot P(G)$

$$P(F) = \frac{1}{6}$$

$$P(G) = \frac{2}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{48} = \frac{3}{16}$$

$$P(F \cap G) = \{ \text{como se obtiene un 6 } (>2) \text{ la moneda que se lanza está bien construida} \} \frac{1}{6} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

$$P(F)P(G) = \frac{1}{6} \frac{3}{16} = \frac{1}{32} \neq \frac{1}{24} = P(F \cap G)$$

**Solución:** los sucesos “obtener un 6 al lanzar el dado” y “obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda” no son independientes.