Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x)=\frac{x}{1-x^2}-x$$

Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(0,5 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(0,5 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(1 punto)*

Solución:

Operemos la expresión de f(x), $f(x)=\frac{x}{1-x^2}-x=\frac{x-x\left(1-x^2\right)}{1-x^2}=\frac{x-x+x^3}{1-x^2}=\frac{x^3}{1-x^2}$

a) Dominio,

$1-x^2=0;\quad x^2=1;\quad x=\pm\sqrt{1}=\pm 1 \quad\rightarrow\quad Dom\ f(x)=\Re-\{-1,1\}$

$Dom\ f(x)=\Re-\{-2,4\}$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \quad\rightarrow\quad f(0)=\frac{0^3}{1-0^2}=0 \quad\rightarrow\quad (0,0)$$

$$f(x)=0 \quad\rightarrow\quad \frac{x^3}{1-x^2}=0;\quad x^3=0;\quad x=0 \quad\rightarrow\quad (0,0)$$

Dom f(x) = ℜ ~{– 1 , 1} y el punto de corte con los ejes coordenados es: (0 , 0).

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{1-x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{-x^2}=\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{1-x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{-x^2}=\lim_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$$

, *no hay asíntota horizontal.*

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que las posibles a.v. son x = – 1 y x = 1.

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3}{1-x^2}=\frac{(-1)^3}{1-(-1)^2}=\frac{-1}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=-1 \quad es\ a.v.$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3}{1-x^2}=\frac{1^3}{1-1^2}=\frac{1}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=1 \quad es\ a.v.$$

No hay asíntota horizontal y las asíntotas verticales son x = – 1 y x = 1.

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

$$f(x)=\frac{x^3}{1-x^2}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2\cdot\left(1-x^2\right)-x^3(1-2x)}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{3x^2-3x^4+2x^4}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{3x^2-x^4}{\left(1-x^2\right)^2}$$

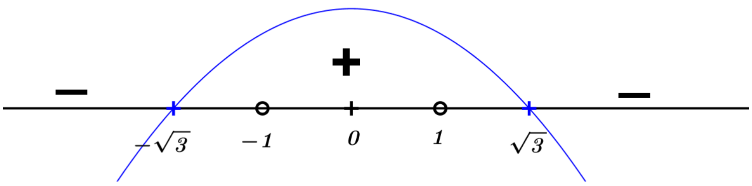
Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

$$3x^2-x^4=0;\quad x^2\left(3-x^2\right)=0;\quad \left\langle\begin{array}{l} x^2=0;\quad x=0 \\ 3-x^2=0;\quad x^2=3;\quad x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$

$$\left(1-x^2\right)^2=0\quad\rightarrow\quad 1-x^2=0\quad\rightarrow\quad\{resuelta\ en\ a)\}\quad x=-1\ y\ 1\notin Dom\ f(x)$$

El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador $3x^2-x^4=x^2\left(3-x^2\right)$ como el factor x^2 es positivo, el signo de $f'(x)$ depende de $3-x^2$ que es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces $\pm\sqrt{3}$, y gráficamente una parábola.

Representando las raíces obtenidas:



Por tanto, ***f(x) es decreciente en*** $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ ***y***

es creciente en $\left(-\sqrt{3},-1\right)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup\left(1,\sqrt{3}\right)$.

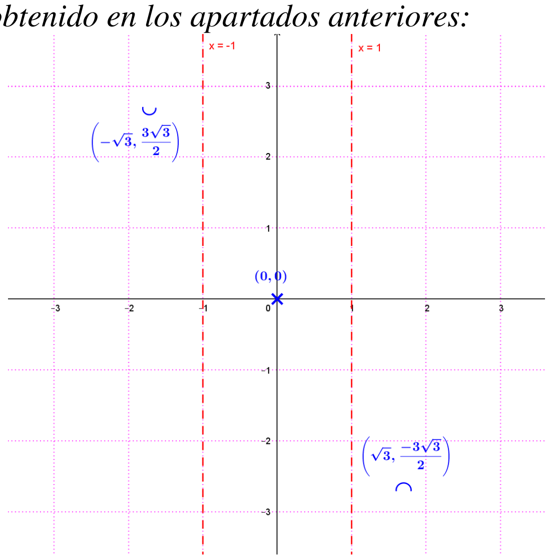
Obtengamos los máximos y mínimos locales. Del estudio de la monotonía deducimos que hay un mínimo local en $x=-\sqrt{3}$ y u máximo local en $x=\sqrt{3}$.

$$x=-\sqrt{3},\quad f\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^3}{1-\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\frac{-3\sqrt{3}}{-2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\quad\rightarrow\quad Mínimo\ local\ \left(-\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\cong(-1'73,2'60)$$

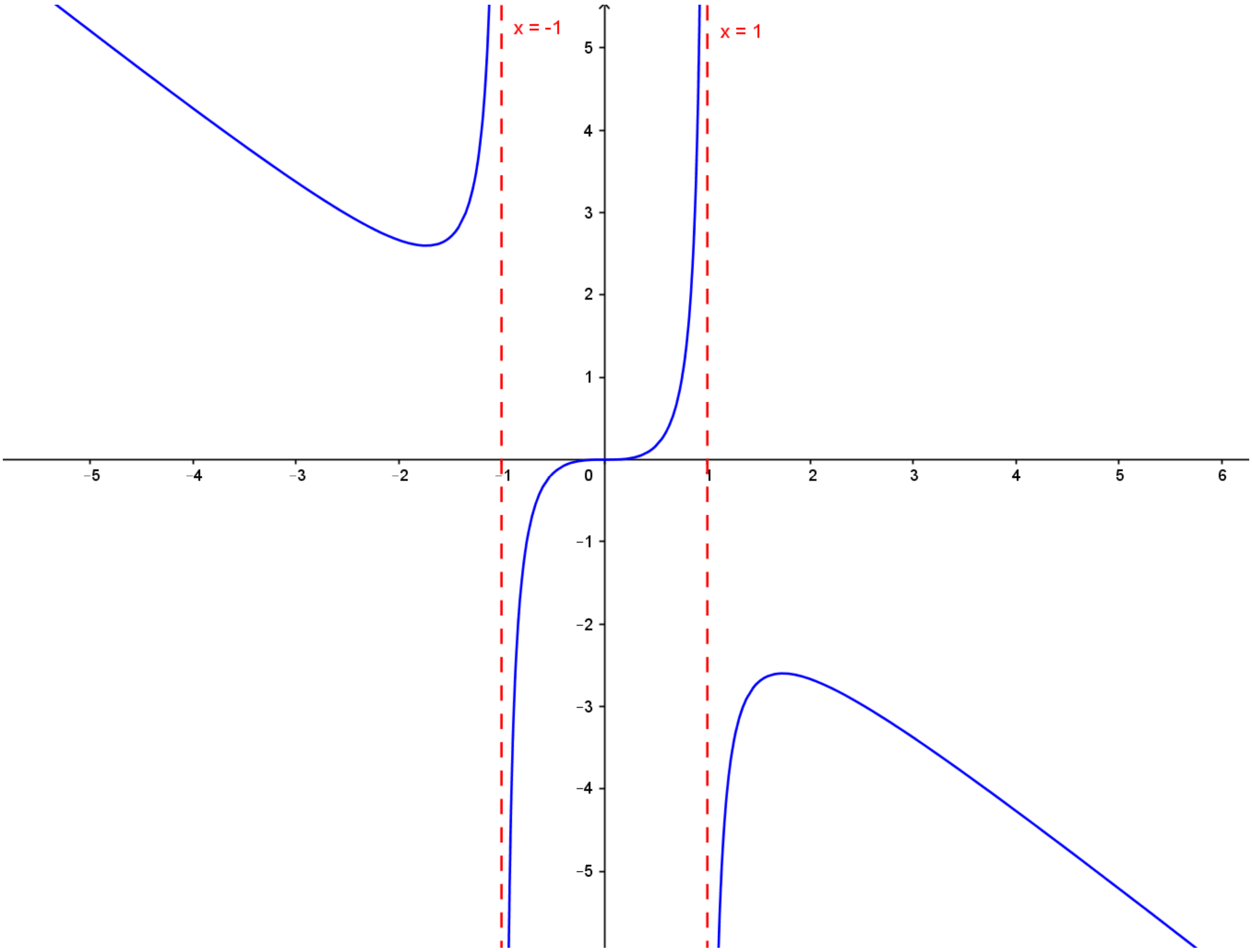
$$x=\sqrt{3},\quad f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{-2}=\frac{-3\sqrt{3}}{2}\quad\rightarrow\quad Máximo\ local\ \left(\sqrt{3},\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)\cong(1'73,-2'60)$$

d) Representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Representando gráficamente lo obtenido en los apartados anteriores:



Teniendo en cuenta los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, su representación será:



Si con la información de los intervalos de crecimiento-decrecimiento la representación no nos queda definida, podemos obtener otros puntos de la función.

$$f(-0'5) = \frac{(-0'5)^3}{1-(-0'5)^2} = \frac{-1}{6}$$

$$f(0'5) = \frac{(0'5)^3}{1-(0'5)^2} = \frac{1}{6}$$