

**Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas**

**Problema 4.** Dada las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , se pide:

- a) Calcula  $(AB)^{-1}$ . (4 puntos)  
 b) Calcula  $C + AB$ . (2 puntos)  
 c) ¿Son iguales las matrices  $C^{-1} + (AB)^{-1}$  y  $(C + AB)^{-1}$ ? (4 puntos)

*Solución:*

a)  $(AB)^{-1}$ .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como  $|AB| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1 \neq 0 \rightarrow \exists (AB)^{-1}$

Cálculo de  $(AB)^{-1}$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{menores}\} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{adjuntos}\} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{traspuesta}\} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } (AB)^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Solución:**  $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) ¿ $C + AB$ ?

$$C + AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

**Solución:**  $C + AB = I$

c) ¿Son iguales las matrices  $C^{-1} + (AB)^{-1}$  y  $(C + AB)^{-1}$ ?

En el apartado anterior hemos obtenido que  $C + AB = I$ , por tanto  $(C + AB)^{-1} = I^{-1} = I$

Calculemos  $C^{-1} + (AB)^{-1}$

Cálculo de  $C^{-1}$

Como  $|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1 \neq 0 \rightarrow \exists C^{-1}$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{menores}\} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{adjuntos}\} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \{\text{traspuesta}\} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } C^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} + (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Hemos comprobado que  $C^{-1} + (AB)^{-1} = I = (C + AB)^{-1}$ . Por lo que, **las dos matrices dadas son iguales.**