PROBLEMA B.2. Se dan las rectas $r:\begin{cases}2x-y+5=0\\6x-z+8=0\end{cases}$ y $s:\begin{cases}x=1-2\alpha\\y=2+\alpha\\z=3-\alpha\end{cases}$ y el plano

π: $2x + \text{m}\,z + 1 = 0$, siendo m un parámetro real. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La posición relativa de las rectas r y s y el punto (o puntos) comunes a r y s. *(4 puntos)*
b) El valor del parámetro m para que la recta s sea paralela al plano π. *(3 puntos)*
c) La ecuación del plano que contiene a la recta s y al punto $P(1, 2, 4)$. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿Posición relativa de r y s?

Nos interesa obtener un punto y un vector director de cada una de las rectas.

$r:\begin{cases}2x-y+5=0\\6x-z+8=0\end{cases}$ *como* $\{menor\ de\ y\ z\}$ $\begin{vmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{vmatrix}=1\neq 0$, *despejamos z e y en función de x.*

$$r:\begin{cases}2x-y+5=0\\6x-z+8=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}-y=-5-2x\\-z=-8-6x\end{cases} \rightarrow \begin{cases}y=5+2x\\z=8+6x\end{cases} \rightarrow r:\begin{cases}x=\lambda\\y=5+2\lambda\\z=8+6\lambda\end{cases} \quad \lambda\in\Re$$

Por tanto: $r:\begin{cases}P_r(0,5,8)\\\vec{v}_r(1,2,6)\end{cases}$

$$s:\begin{cases}x=1-2\alpha\\y=2+\alpha\\z=3-\alpha\end{cases} \rightarrow s:\begin{cases}P_s(1,2,3)\\\vec{v}_s(-2,1,-1)\end{cases}$$

Para estudiar la posición relativa de las rectas r y s estudiamos el rango de la matriz $\left[\vec{v}_r \quad \vec{v}_s \quad \overrightarrow{P_rP_s}\right]$, *es decir:* $M'=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\2 & 1 & -3\\6 & -1 & -5\end{pmatrix}$

Rango de M, {M es 3 x 2, luego máximo rango de M es 2}

$$\left.\begin{array}{l}|1|=1\neq 0 \quad\rightarrow\quad ran(M)\geq 1\\ \begin{vmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{vmatrix}=1+4=5\neq 0\end{array}\right\} \rightarrow ran(M)=2 \rightarrow r\ y\ s \left\langle\begin{array}{l}se\ cortan\\o\\se\ cruzan\end{array}\right.$$

Rango de M´, {M´ es 3 x 3, luego máximo rango de M es 3}.

Por el cálculo del rango de M, sabemos que ran (M´) ≥ 2

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\2 & 1 & -3\\6 & -1 & -5\end{vmatrix}=-5-2+36-6-3-20=0 \rightarrow ran(M')=2$$

Como ran (M) = ran(M´) = 2, ***las rectas r y s se cortan.***

El punto de corte entre r y s lo obtenemos resolviendo el sistema de las rectas a partir de sus ecuaciones paramétricas. Es decir,

$$\begin{cases} \lambda = 1 - 2\alpha \\ 5 + 2\lambda = 2 + \alpha \\ 8 + 6\lambda = 3 - \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\alpha = 1 \\ 2\lambda - \alpha = -3 \\ 6\lambda + \alpha = -5 \end{cases}$$

De este sistema, según el estudio de rangos anterior, sabemos que rango de la matriz de coeficientes = rango de la matriz ampliada = 2 = nº de incógnitas (λ y α).
Resolvemos usando 1ª y 2ª ecuación (corresponden al menor de orden 2 no nulo). El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} \lambda + 2\alpha = 1 \\ 2\lambda - \alpha = -3 \end{cases} \xrightarrow{\;2x2^a\;} \begin{cases} \lambda + 2\alpha = 1 \\ 4\lambda - 2\alpha = -6 \end{cases}$$

$$5\lambda \quad = -5 \rightarrow \lambda = -1$$

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $2(-1) - \alpha = -3; \quad -2 - \alpha = -3; \quad -\alpha = -3 + 2; \quad -\alpha = -1; \quad \alpha = 1$

Sustituimos los valores de las incógnitas en las ecuaciones de r y s para comprobar que se obtiene el mismo punto. Sólo sería necesario sustituir en una de las rectas.

$$En \quad r: \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 + 2(-1) = 3 \\ z = 8 + 6(-1) = 2 \end{cases} \qquad En \quad s: \begin{cases} x = 1 - 2.1 = -1 \\ y = 2 + 1 = 3 \\ z = 3 - 1 = 2 \end{cases}$$

Por tanto, ***el punto de corte entre las rectas r y s es (– 1 , 3 , 2)***

b) ¿m / recta s // plano π?

Como $s // \pi \rightarrow \vec{v}_s \perp \vec{n}_\pi \quad \left[\vec{n}_\pi \text{ vector perpendicular al plano } \pi \right] \rightarrow \vec{v}_s \cdot \vec{n}_\pi = 0$

$\vec{v}_s(-2, 1, -1)$ y $\vec{n}_\pi(2, 0, m)$, $\quad \vec{v}_s . \vec{n}_\pi = (-2, 1, -1)(2, 0, m) = -4 - m$

Por lo que, $-4 - m = 0; \quad m = -4$

En conclusión, ***para que la recta s sea paralela al plano π debe ser m = – 4.***

c) ¿plano τ? / recta $s \subset \tau$ *y* $P(1, 2, 4) \in \tau$

Para obtener la ecuación del plano τ necesitamos un punto y dos vectores directores del plano.

Como $s \subset \tau \rightarrow \begin{cases} P_s(1, 2, 3) \in \tau \\ \vec{v}_s(-2, 1, -1) \text{ es director de } \tau \end{cases}$

Además, $P(1, 2, 4) \in \tau$

Por tanto, del plano τ conocemos $\rightarrow \begin{cases} \text{punto } (1, 2, 3) \\ \vec{u} = \vec{v}_s(-2, 1, -1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PP_s}(0, 0, -1) \end{cases}$

Como los vectores $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *no son paralelos* $\left(\frac{-2}{0} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{-1}{1} \right)$ *sirven como vectores directores de τ.*

La ecuación del plano τ será: $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$, *efectuando operaciones:*

$-x + 1 - 2y + 4 = 0; \quad -x - 2y + 5 = 0; \quad x + 2y - 5 = 0$

Solución: ***τ: x + 2 y – 5 = 0***