PROBLEMA A.1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x \quad\quad + 3z = \alpha \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = \alpha + 1 \end{cases}$

donde α es un parámetro real. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado. *(4 puntos)*

b) Las soluciones del sistema cuando $\alpha = -1$. *(3 puntos)*

c) El valor de α para que el sistema tenga una solución (x, y, z) que verifique $x + y + z = 0$. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿α? / el sistema sea compatible y determinado

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha+1 \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A´ es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -20 - 3 + 18 + 4 = -1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) = 3$$

Entonces, ran(A) = 3 y, como el máximo rango de A´ es 3, ran(A´) = 3,
luego ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas → Sistema Compatible Determinado

Por tanto, ***el sistema es compatible y determinado*** $\forall\, \alpha \in \Re$.

b) Las soluciones del sistema cuando $\alpha = -1$
Según lo estudiado anteriormente, el sistema es compatible y determinado. Lo resolveremos por Cramer.

La matriz ampliada del sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right)$ *y* $|A|$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{10 - 2 - 15}{-1} = \frac{-7}{-1} = 7 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{50 - 6 - 45 + 5}{-1} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1 - 6 + 10}{-1} = \frac{5}{-1} = -5$$

Cuando $\alpha = -1$ la solución del sistema es: $x = 7$, $y = -4$, $z = -5$.

c) Habrá que estudiar el sistema formado por las tres ecuaciones iniciales y la ecuación de la condición.

Es decir, el sistema a estudiar es: $\begin{cases} 2x \quad\quad +3z=\alpha \\ x-2y+2z=5 \\ 3x-y+5z=\alpha+1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

La matriz ampliada de este sistema es: $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$.

A es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 4x4, por tanto el máximo rango de A´ es 4.

Empezamos estudiando el rango de A´,

$$|A'|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{Bmatrix} C_1-C_2 \\ C_3-C_2 \end{Bmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & \alpha \\ 3 & -2 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & \alpha+1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}= \{\text{desarrollando por la } 4^a \text{ fila}\} =$$

$$=1\begin{vmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & \alpha+1 \end{vmatrix}=-2(\alpha+1)+6\alpha+20+4\alpha-20-3(\alpha+1)=-2\alpha-2+10\alpha-3\alpha-3=5\alpha-5$$

$5\alpha-5=0;\quad 5\alpha=5;\quad \alpha=1$

Si $\alpha\neq 1$, *ran(A´) = 4 y como el máximo rango de A es 3, el sistema sería incompatible.*

Si $\alpha=1$, *ran(A´)* ≤ 3

el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}=-20-3+18+4=-1\neq 0$ *y este menor es de A y A´, por tanto*

ran(A) = ran(A´) = 3 = nº de incógnitas $\rightarrow$ *Sistema Compatible Determinado.*

Para que el sistema tenga una solución que verifique x + y + z = 0 debe ser $\boldsymbol{\alpha=1}$.