Problema 1. Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde k es un parámetro real.

a) ¿Para qué valores del parámetro k la matriz A es invertible? *(2 puntos)*
b) Para $k = 0$, si existe, calcular la matriz inversa de A. *(4 puntos)*
c) Para $k = 0$, hallar las matrices diagonales D que verifican $A\,D = D\,A$. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿k? / A sea invertible.

A es invertible si /A/ ≠ 0.

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & k & 3 \\ k & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-3k+2k-2+k^2=k^2-k-2$$

$$k^2-k-2=0 \quad\to\quad k=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases} k_1=\dfrac{1+3}{2}=2 \\ k_2=\dfrac{1-3}{2}=-1 \end{cases}$$

Por lo tanto, ***A es invertible si k ≠ − 1 y k ≠ 2****.*

b) Para k = 0, calcular A^{-1}.

Como k = 0 (k ≠ − 1 y k ≠ 2) → existe la matriz inversa de A.

Cálculo de A^{-1}

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad |A|=\left(k^2-k-2\right)\Big|_{k=0}=-2$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1/3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1/3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1/3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2/3 & -2 & -2/3 \\ 3 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 2/3 & 2 & -2/3 \\ -3 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} 2/3 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Y } A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 2/3 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2/3 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/3 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1/3 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) Para $k = 0$, calcular las matrices diagonales D que verifican A D = D A.

Como A es 3x3, para que se puedan efectuar los dos productos la matriz D también es 3x3.

D es una matriz diagonal $\rightarrow \quad D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$

Calculemos A D,

$$A\,D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3z \\ 0 & y/3 & z \\ 2z & -y & -z \end{pmatrix}.$$

Calculemos D A,

$$D\,A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3x \\ 0 & y/3 & y \\ 2z & -z & -z \end{pmatrix}.$$

Los dos productos deben ser iguales:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3z \\ 0 & y/3 & z \\ 2z & -y & -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3x \\ 0 & y/3 & y \\ 2z & -z & -z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3z = 3x \\ y/3 = y/3 \\ z = y \\ 2z = 2z \\ -y = -z \\ -z = -z \end{cases} \text{ eliminando las identidades, } \begin{cases} 3z = 3x \\ z = y \\ -y = -z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = x \\ z = y \\ y = z \end{cases}$$

La 2^a y 3^a ecuaciones son la misma, queda $\begin{cases} z = x \\ z = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$, *la solución es* $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

Solución: las matrices diagonales buscadas son $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \Re.$