Problema 2. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ a & 0 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2 X = B$ tiene una única solución. *(5 puntos)*

b) Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix}3\\ -2\\ -1\end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2 X = B$, encontrar el valor de α, β y γ dependiendo del parámetro real a. *(5 puntos)*

Solución:

a) Calculemos A^2,

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ a & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ a & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2a & 0 & 8\\ 9+a & 4 & 11\\ 4a & 0 & 2a+9\end{pmatrix}$$

La ecuación $A^2 X = B$ tendrá solución única si existe la inversa de A^2, por tanto si $|A^2| \neq 0$

$$\left|A^2\right|=\begin{vmatrix}1+2a & 0 & 8\\ 9+a & 4 & 11\\ 4a & 0 & 2a+9\end{vmatrix}=(1+2a)\,4\,(2a+9)-8\cdot 4\cdot 4a=4\left[(1+2a)(2a+9)-32a\right]=4\left(4a^2+20a+9-32a\right)=$$

$$=4\left(4a^2-12a+9\right). \qquad 4\left(4a^2-12a+9\right)=0; \quad 4a^2-12a+9=0$$

$$a=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot 4\cdot 9}}{2\cdot 4}=\frac{12\pm 0}{8}=\frac{3}{2}$$

Solución: la ecuación $A^2 X = B$ tiene solución única si $a\neq\frac{3}{2}$.

b)

Sabemos que $\begin{pmatrix}1+2a & 0 & 8\\ 9+a & 4 & 11\\ 4a & 0 & 2a+9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}(1+2a)\cdot 3+0\cdot(-2)+8\cdot(-1)\\ (9+a)\cdot 3+4\cdot(-2)+11\cdot(-1)\\ 4a\cdot 3+0\cdot(-2)+(2a+9)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}3+6a-8\\ 27+3a-8-11\\ 12a-2a-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}6a-5\\ 3a+8\\ 10a-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}\alpha=6a-5\\ \beta=3a+8\\ \gamma=10a-9\end{cases}$$

Solución: $\begin{cases}\alpha=6a-5\\ \beta=3a+8\\ \gamma=10a-9\end{cases}$