Problema 3. Se dan las rectas $r: x-1=y-2=\frac{z-1}{2}$ y $s: \frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$. Se pide:

a) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección. *(5 puntos)*

b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y a s. *(5 puntos)*

Solución:

a) Comprobar que r y s se cortan

Nos interesa obtener un punto y un vector director de cada una de las rectas.

$$r: x-1=y-2=\frac{z-1}{2} \rightarrow \begin{cases} P_r(1,2,1) \\ \vec{v}_r(1,1,2) \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$$

$$s: \frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2} \rightarrow \begin{cases} P_s(3,3,-1) \\ \vec{v}_s(-2,-1,2) \end{cases} \rightarrow s: \begin{cases} x=3-2\alpha \\ y=3-\alpha \\ z=-1+2\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \Re$$

Para estudiar la posición relativa de las rectas r y s estudiamos el rango de la matriz $\left[\vec{v}_r \quad \vec{v}_s \quad \overrightarrow{P_rP_s}\right]$, *es decir:* $M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Rango de M, {M es 3 x 2, luego máximo rango de M es 2}

$$\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(M) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-2=-1 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(M)=2 \quad \rightarrow \quad r \text{ y } s \left\langle \begin{array}{l} \text{se cortan} \\ \text{o} \\ \text{se cruzan} \end{array}\right.$$

Rango de M´, {M´ es 3 x 3, luego máximo rango de M es 3}.

Por el cálculo del rango de M, sabemos que ran (M´) ≥ 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2-4+4-4+2+4=0 \quad \rightarrow \quad ran(M')=2$$

Como ran (M) = ran(M´) = 2, ***las rectas r y s se cortan.***

El punto de corte entre r y s lo obtenemos resolviendo el sistema de las rectas a partir de sus ecuaciones paramétricas. Es decir,

$$\begin{cases} 1+\lambda=3-2\alpha \\ 2+\lambda=3-\alpha \\ 1+2\lambda=-1+2\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda+2\alpha=2 \\ \lambda+\alpha=1 \\ 2\lambda-2\alpha=-2 \end{cases}$$

De este sistema, según el estudio de rangos anterior, sabemos que rango de la matriz de coeficientes = rango de la matriz ampliada = 2 = nº de incógnitas (λ *y* α*).*

Resolvemos usando 1ª y 2ª ecuación (corresponden al menor de orden 2 no nulo). El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} \lambda+2\alpha=2 \\ \lambda+\alpha=1 \end{cases} \rightarrow \quad (-1)x2^a \quad \begin{cases} \lambda+2\alpha=2 \\ -\lambda-\alpha=-1 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad \alpha=1 \qquad}$$

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $\lambda+1=1; \quad \lambda=0$

Sustituimos los valores de las incógnitas en las ecuaciones de r y s para comprobar que se obtiene el mismo punto. Sólo sería necesario sustituir en una de las rectas.

$$\text{En} \quad r:\begin{cases} x=1+0=1 \\ y=2+0=2 \\ z=1+0=1 \end{cases} \qquad \text{En} \quad s:\begin{cases} x=3-2\alpha=3-2\cdot 1=1 \\ y=3-\alpha=3-1=2 \\ z=-1+2\alpha=-1+2\cdot 1=1 \end{cases}$$

Por tanto, ***el punto de corte entre las rectas r y s es P (1 , 2 , 1)***

b) ¿recta $t \ / \ P \in t$ *y* $t \perp r$ *y* s*?*

Como $t \perp r$ *y* $s \ \rightarrow \ \vec{v}_t = \vec{v}_r \otimes \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$

Por tanto $\vec{v}_t(4, -6, 1)$. *Como* $P(1, 2, 1) \in t$*, la ecuación de la recta* t *será:*

Ecuación paramétrica $t:\begin{cases} x=1+4\beta \\ y=2-6\beta \\ z=1+\beta \end{cases} \quad \beta \in \Re$, ***ecuación continua*** $t: \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{-6} = \dfrac{z-1}{1}$.