Problema 4. Sea el plano π: $6x + 4y - 3z - d = 0$. Se pide:

a) Calcular los valores de d para que la distancia del plano al origen sea una unidad. *(2 puntos)*

b) Calcular, en función del parámetro d, las coordenadas de los puntos A, B y C que resultan de intersectar el plano π con los ejes de coordenadas, X, Y y Z, respectivamente. *(3 puntos)*

c) Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior. *(5 puntos)*

Solución:

a) ¿d? / d (π , (0,0,0)) = 1.

$$d(\pi,O)=\frac{|6\cdot 0+4\cdot 0-3\cdot 0d|}{\sqrt{6^2+4^2+(-3)^2}}=\frac{|d|}{\sqrt{61}}$$

y debe ser $\frac{|d|}{\sqrt{61}}=1 \;\rightarrow\; |d|=61 \;\rightarrow\; \left\langle \begin{array}{l} d=\sqrt{61} \\ d=-\sqrt{61} \end{array} \right.$

Solución: $d=\sqrt{61}$ *o* $d=-\sqrt{61}$.

b) Calculemos los tres puntos A, B y C, intersección del plano π con cada uno de los tres ejes coordenados.

A, corte del plano π con eje X. La ecuación del eje X es: $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x+4y-3z-d=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow 6x-d=0 \rightarrow 6x=d \rightarrow x=\frac{d}{6} \rightarrow A\left(\frac{d}{6},0,0\right)$$

B, corte del plano π con eje Y. La ecuación del eje Y es: $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x+4y-3z-d=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow 4y-d=0 \rightarrow 4y=d \rightarrow y=\frac{d}{4} \rightarrow B\left(0,\frac{d}{4},0\right)$$

C, corte del plano π con eje Z. La ecuación del eje Z es: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x+4y-3z-d=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow -3z-d=0 \rightarrow 3z=-d \rightarrow z=\frac{-d}{3} \rightarrow B\left(0,0,\frac{-d}{3}\right)$$

Solución: los puntos son $A\left(\frac{d}{6},0,0\right)$, $B\left(0,\frac{d}{4},0\right)$ *y* $C\left(0,0,\frac{-d}{3}\right)$.

c) Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.

$$Sea \quad \alpha = \left(\widehat{\vec{AB}\,,\vec{AC}} \right)$$

$$\vec{AB} = \left(0\,,\frac{d}{4}\,,0\right) - \left(\frac{d}{6}\,,0\,,0\right) = \left(\frac{-d}{6}\,,\frac{d}{4}\,,0\right)$$

$$\vec{AC} = \left(0\,,0\,,\frac{-d}{3}\right) - \left(\frac{d}{6}\,,0\,,0\right) = \left(\frac{-d}{6}\,,0\,,\frac{-d}{3}\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{AB}.\vec{AC}\right|}{\left|\vec{AB}\right|\left|\vec{AC}\right|} = \frac{\left|\left(\frac{-d}{6}\,,\frac{d}{4}\,,0\right)\cdot\left(\frac{-d}{6}\,,0\,,\frac{-d}{3}\right)\right|}{\sqrt{\left(\frac{-d}{6}\right)^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2 + 0^2}\;\sqrt{\left(\frac{-d}{6}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{-d}{3}\right)^2}} = \frac{\left|\frac{d^2}{36}\right|}{\sqrt{\frac{d^2}{36}+\frac{d^2}{16}}\;\sqrt{\frac{d^2}{36}+\frac{d^2}{9}}} =$$

$$= \frac{\left|\frac{d^2}{36}\right|}{\sqrt{\frac{52d^2}{576}}\;\sqrt{\frac{45d^2}{324}}} = \frac{\left|\frac{d^2}{36}\right|}{\sqrt{\frac{13d^2}{144}}\;\sqrt{\frac{5d^2}{36}}} = \frac{\left|\frac{d^2}{36}\right|}{\frac{\sqrt{13d^2}}{12}\;\frac{\sqrt{5d^2}}{6}} = \frac{\left|\frac{d^2}{36}\right|}{\frac{\sqrt{65d^4}}{72}} = \frac{\left|\frac{d^2}{36}\right|}{\frac{d^2\sqrt{65}}{72}} =$$

$$\left\{\frac{d^2}{36} > 0 \rightarrow \left|\frac{d^2}{36}\right| = \frac{d^2}{36}\right\} = \frac{\frac{d^2}{36}}{\frac{d^2\sqrt{65}}{72}} = \frac{72\,d^2}{36\,d^2\sqrt{65}} = \frac{2}{\sqrt{65}}$$

$$Entonces, \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{65}} \quad \rightarrow \quad \alpha = arc\cos\left(\frac{2}{\sqrt{65}}\right) \cong 75´6367º \quad o \quad 1´3201\ rds.$$

Solución: el ángulo formado por los vectores $\vec{AB}$ *y* $\vec{AC}$ ***es 75´6367º o 1´3201 rds.***