Problema 5. Se considera la función $h(x) = a\,x + x^2$ donde a es un parámetro real. Se pide:

a) El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abcisa $x = \frac{-3}{4}$. *(3 puntos)*

b) Para el valor de a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$. *(2 puntos)*

c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas. *(5 puntos)*

Solución:

a) ¿a? / $y = h(x)$ *tenga un mínimo relativo en* $x = \frac{-3}{4}$.

$h'(x) = a + 2x$; $a + 2x = 0$; $2x = -a$; $x = \frac{-a}{2}$.

$h''(x) = 2 \quad \rightarrow \quad h''\left(\frac{-a}{2}\right) = 2 > 0 \quad \rightarrow$ *en* $x = \frac{-a}{2}$ *hay un mínimo relativo.*

Por tanto, $\frac{-a}{2} = \frac{-3}{4} \quad \rightarrow \quad -a = \frac{-6}{4} \quad \rightarrow \quad a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Solución: $\boldsymbol{a = \frac{3}{2}}$.

b) Para $a = \frac{3}{2}$ *dibujar las curvas* $y = h(x)$ *e* $y = h'(x)$.

$y = h(x) = x^2 + \frac{3}{2}x$

Polinomio de 2º grado, gráficamente una parábola.

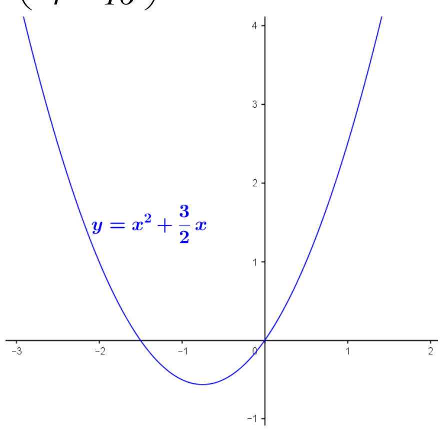
Corte con ejes coordenados $(0, 0)$ y $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$

$x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0$

$y = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + \frac{3}{2}x = 0; \quad x\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x + \frac{3}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{-3}{2} \end{array} \right.$

Por lo estudiado en el apartado a), esta función tiene un mínimo relativo en $x = \frac{-3}{4} \quad \rightarrow \quad y = \left(\frac{-3}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\,\frac{-3}{4} = \frac{9}{16} - \frac{9}{8} = \frac{-9}{16}$

Mínimo relativo $\left(\frac{-3}{4}, \frac{-9}{16}\right)$



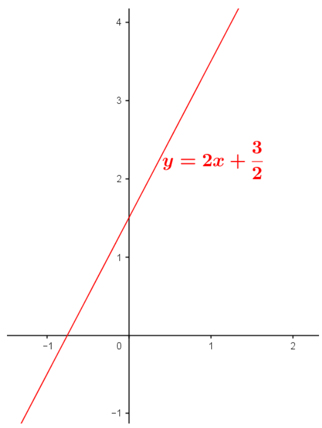
$y = h'(x) = 2x + \frac{3}{2}$

Polinomio de 1º grado, gráficamente una recta.

$x = 0 \rightarrow y = 2 \cdot 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

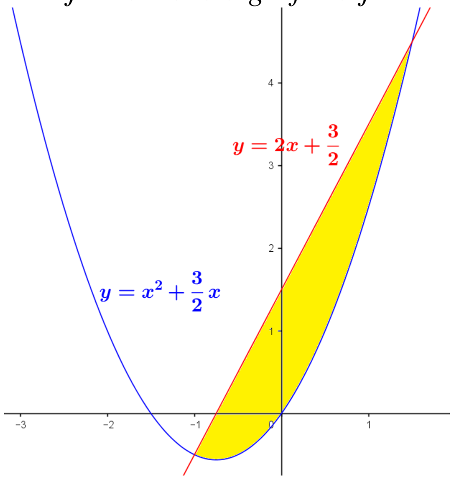
$y = 0 \rightarrow 2x + \frac{3}{2} = 0; \; 2x = \frac{-3}{2}; \; x = \frac{-3}{4}$

x	y
0	$\frac{3}{2}$
$\frac{-3}{4}$	0



c) ¿área del plano comprendida entre ambas curvas?

Dibujemos las dos gráficas juntas:



El área comprendida entre las dos curvas es la zona coloreada.

Obtengamos los puntos de corte entre las dos curvas,

$$x^2 + \frac{3}{2}x = 2x + \frac{3}{2}; \quad 2x^2 + 3x = 4x + 3; \quad 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{1-5}{4} = -1 \end{cases}$$

El área pedida la obtendremos a calculando la siguiente integral definida,

$$A = \int_{-1}^{3/2} \left(2x + \frac{3}{2} - x^2 - \frac{3}{2}x \right) dx = \int_{-1}^{3/2} \left(-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^{3/2} = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^{3/2} =$$

$$= \left[-\frac{\left(3/2\right)^3}{3} + \frac{\left(3/2\right)^2}{4} + \frac{3}{2}\left(3/2\right) \right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{4} + \frac{3}{2}(-1) \right] = \left(-\frac{9}{8} + \frac{9}{16} + \frac{9}{4} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) =$$

$$= \frac{27}{16} + \frac{11}{12} = \frac{125}{48} \cong 2´6042$$

Solución: el área pedida mide $\frac{125}{48}$ $u.a. \cong 2´6042\ u.a.$