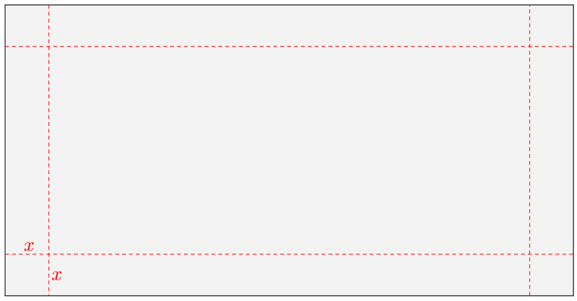
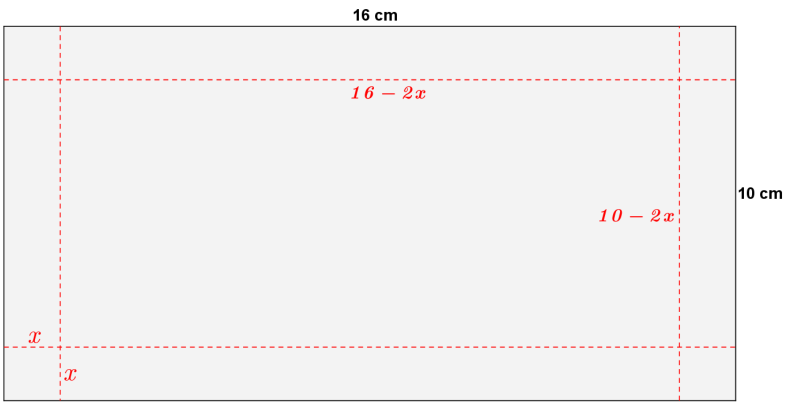
Problema 6. Se construye una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja rectangular de 16 cm por 10 cm. Esto se hace recortando un cuadrado de longitud x en cada esquina, doblando la hoja y levantando los cuatro laterales de la caja. Calcular:

a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible. *(8 puntos)*
b) Dicho volumen. *(2 puntos)*



Solución:
Completando las dimensiones de la hoja:



Las dimensiones, en cm, de la caja de cartón a construir son:
largo $16 - 2x$,
ancho $10 - 2x$ y
alto x

Por lo tanto el volumen de la caja será

$$V(x) = (16 - 2x)(10 - 2x)\,x$$

Y para que haya caja deberá cumplirse: $\begin{cases} x > 0 \\ 16 - 2x > 0 \;\rightarrow\; 16 > 2x \;\rightarrow\; 8 > x \;\equiv\; x < 8, \\ 10 - 2x > 0 \;\rightarrow\; 10 > 2x \;\rightarrow\; 5 > x \;\equiv\; x < 5 \end{cases}$ *luego* $0 < x < 5$

$V(x) = (160 - 32x - 20x + 4x^2)\,x = (4x^2 - 52x + 160)\,x = 4x^3 - 52x^2 + 160x$

Debemos obtener el máximo de la función $V(x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$ *siendo* $0 < x < 5$

$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160$

$$12x^2 - 104x + 160 = 0; \quad x = \frac{-(-104) \pm \sqrt{(-104)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 160}}{2 \cdot 12} = \frac{104 \pm 56}{24} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{104 + 56}{24} = \dfrac{20}{3} > 5 \\ x_1 = \dfrac{104 - 56}{24} = 2 \in (0,5) \end{cases}$$

Obtengamos el signo de $V'(x)$ a la izquierda y derecha de $x = 2$.

$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160$

$x = 1'5 \;\rightarrow\; V'(1'5) = 12\,(1'5)^2 - 104\,(1'5) + 160 = 31 > 0$ *creciente*

$x = 2'5 \;\rightarrow\; V'(2'5) = 12\,(2'5)^2 - 104\,(2'5) + 160 = -25 < 0$ *decreciente*

Por tanto, como $V(x)$ es creciente a la izquierda de 2 y decreciente a su derecha el máximo relativo es absoluto.

Para $x = 2$, largo $16 - 2 \cdot 2 = 12$, ancho $10 - 2 \cdot 2 = 6$; $V(2) = 4 \cdot 2^3 - 52 \cdot 2^2 + 160 \cdot 2 = 144$

Solución:

a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible son: 12 cm de largo, 6 cm de ancho y 2 cm de altura.

b) El volumen máximo es de 144 cm^3.