2.1 Se dan las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}.$$

Obtener:

2.1.1 **(1.25 puntos)** La matriz X solución de la ecuación $\left(A^{-1}\,X\right)^{-1}=A\left(B^2\,A\right)^{-1}$.

2.1.2 **(0.5 puntos)** El determinante de la matriz $\left(3A^5\,B\right)^2$.

2.1.3 **(0.75 puntos)** Los valores de a y b, si existen, tales que $a\,B^{100}+b\,B^{99}=A+C$.

Solución:

2.1.1 ¿Matriz X? / $\left(A^{-1}\,X\right)^{-1}=A\left(B^2\,A\right)^{-1}$.

Considerando la siguiente propiedad de matrices:

$$(A\,B)^{-1}=B^{-1}\,A^{-1}\quad\rightarrow\quad \begin{array}{l}\left(A^{-1}\,X\right)^{-1}=X^{-1}\left(A^{-1}\right)^{-1}=X^{-1}\,A\\ \left(B^2\,A\right)^{-1}=A^{-1}\left(B^2\right)^{-1}\end{array}$$

Operemos con la expresión $\left(A^{-1}\,X\right)^{-1}=A\left(B^2\,A\right)^{-1}$

$$X^{-1}\,A=A\,A^{-1}\left(B^2\right)^{-1};\qquad X^{-1}\,A=I\left(B^2\right)^{-1};\qquad X^{-1}\,A=\left(B^2\right)^{-1}$$

Multiplicando por la derecha por A^{-1},

$$X^{-1}\,A\,A^{-1}=\left(B^2\right)^{-1}A^{-1};\qquad X^{-1}\,I=\left(B^2\right)^{-1}A^{-1};\qquad X^{-1}=\left(B^2\right)^{-1}A^{-1};$$

Aplicando la propiedad anterior: $X^{-1}=\left(A\,B^2\right)^{-1}$, *por lo tanto,* $X=A\,B^2$.

Calculemos $B^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I\ \rightarrow\ X=A\,B^2=A\,I=A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

Solución: $X=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$.

2.1.2 Calcular $\left|\left(3\,A^5\,B\right)^2\right|$

Considerando las propiedades de los determinantes: $|A\,B|=|A|\,|B|$ *y* $|n\,A|=n^2\,|A|$ $(por\ ser\ A\ \ 2x2)$

$$\left|\left(3\,A^5\,B\right)^2\right|=\left|3\,A^5\,B\right|^2=(-9)^2=81$$

$$\left|3\,A^5\,B\right|=3^2\,|A|^5\,|B|=9\,|A|^5\,|B|=9\,1^5\,(-1)=-9$$

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=4-3=1\quad y\quad |B|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1$$

Solución: $\left|\left(3\,A^5\,B\right)^2\right|=81.$

2.1.3) ¿ a, b ? / a B^{100} + b B^{99} = A + C

Efectuemos los cálculos necesarios:

$$A+C=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el apartado 2.1.1 hemos calculado que $B^2 = I$. Por tanto, de las potencias de B sabemos:

$B^1 = B$; $B^2 = I$; $B^3 = B^2\,B = I\,B = B$; $B^4 = B^2\,B^2 = I\,I = I$; ...

Luego, para n impar $B^n = B$ *y*

para n par $B^n = I$

Por lo que $B^{100} = I$ *y* $B^{99} = B$

$$a\,B^{100}+b\,B^{99}=a\,I+b\,B=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b & 2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$$

Hay que resolver la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} a+b & 2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 2b=0 \\ a-b=1 \end{cases}$$

de la 2ª ecuación: b = 0

sustituyendo en las otras dos:

$$\begin{cases} a+0=1 \\ a-0=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=1 \end{cases} \rightarrow a=1$$

Finalmente, la solución de la ecuación matricial es a = 1 y b = 0.

Solución: a = 1 y b = 0.