2.2 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que depende del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ a\,x - y + z = a \\ a\,x + y = a \end{cases}$$

Se pide:

2.2.1 **(1.25 puntos)** Discutir el sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro a.

2.2.2 **(1.25 puntos)** Calcular el conjunto de soluciones del sistema para aquellos valores de a para los que el sistema es compatible determinado.

Solución:

2.2.1

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -1 & -a \\ a & -1 & 1 & a \\ a & 1 & 0 & a \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3. A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A´ es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a - a^2 - a - 1 = -a^2 - 2a - 1 = -\left(a^2 + 2a + 1\right)$$

$$a^2 + 2a + 1 = 0; \quad a = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \rightarrow \quad a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$$

Si $a \neq -1$

$|A| \neq 0$ → ran(A) = 3, y como el máximo rango de A´ es 3 → ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Si $a = -1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos el rango de A, $\left.\begin{array}{l} |a_{22}| = |-1| = -1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) = 2$

En A´, a partir del menor no nulo de orden 2 anterior formamos el menor de orden 3 añadiéndole la 1ª fila y 4ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \{F_2 = -F_1\} = 0 \quad \rightarrow \quad ran\,(A') = 2$$

Por lo tanto, ran(A) = ran(A´) = 2 < 3(número de incógnitas), luego el sistema es compatible indeterminado.

Solución, ***si $a \neq -1$, el sistema es compatible determinado;***
si $a = -1$, el sistema es compatible indeterminado.

2.2.2 El sistema es compatible determinado para $a \neq -1$.

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x - ay - z = -a \\ a\,x - y + z = a \\ a\,x + y = a \end{cases}$

$|A| = -\left(a^2 + 2a + 1\right) = -(a+1)^2, \qquad \{a \neq -1 \quad \rightarrow \quad a + 1 \neq 0\}$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-(a+1)^2} = \frac{\begin{matrix} \\ F_2 + F_1 \\ \\ \end{matrix}\begin{vmatrix} -a & -a & -1 \\ 0 & -a-1 & 0 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-(a+1)^2} = \frac{(-a-1)\,a}{-(a+1)^2} = \frac{-(a+1)\,a}{-(a+1)^2} = \frac{a}{(a+1)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & a & 1 \\ a & a & 0 \end{vmatrix}}{-(a+1)^2} = \frac{\begin{matrix} \\ F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1 \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ a+1 & 0 & 0 \\ a+1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-(a+1)^2} = \frac{-a\,(a+1)}{-(a+1)^2} = \frac{a}{(a+1)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a & -a \\ a & -1 & a \\ a & 1 & a \end{vmatrix}}{-(a+1)^2} == \frac{-a - a^2 - a^3 - a^2 - a + a^3}{-(a+1)^2} = \frac{-2a^2 - 2a}{-(a+1)^2} = \frac{-2a(a+1)}{-(a+1)^2} = \frac{2a}{a+1}$$

Si $a \neq -1$, la solución es: $\begin{cases} x = \dfrac{a}{a+1} \\ y = \dfrac{a}{a+1} \\ z = \dfrac{2a}{a+1} \end{cases}$