4.1 Dada la función real de variable real

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1},$$

se pide:

4.1.1 **(0.5 puntos)** Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f*.

4.1.2 **(1.5 puntos)** Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función *f*.

4.1.3 **(0.5 puntos)** Representar la función *f*.

Solución:

4.1.1

Dom f(x),

$$x^2+1=0; \quad x^2=-1; \quad x=\pm\sqrt{-1}\notin\Re \qquad \rightarrow \quad Dom\ f(x)=\Re$$

Asíntotas,

verticales,

Como Dom f(x) = $\Re$*, f(x) no tiene asíntotas verticales.*

horizontales,

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0 \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad y=0 \text{ es la asíntota horizontal.}$$

oblicua, como la función es un cociente de dos polinomios al tener a. horizontal no tiene a. oblicua.

Por lo tanto, $Dom\ f(x)=\Re$ ***y sólo tiene asíntota horizontal que es y = 0.***

Intervalos de crecimiento-decrecimiento.

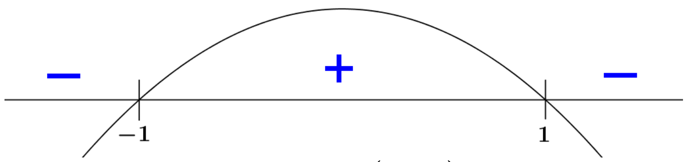
Debemos estudiar el signo de f´(x) en su dominio.

$$f'(x)=\frac{1\left(x^2+1\right)-x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Como el denominador está elevado al cuadrado será positivo, luego el signo de f´(x) sólo depende del numerador. Obtengamos las raíces del numerador:

$$1-x^2=0; \quad x^2=1; \quad x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

Como $1-x^2$ *es un polinomio de segundo grado con las raíces obtenidas y coeficiente de* x^2 *negativo, su signo gráficamente es:*



Por tanto, ***f(x) es creciente en*** $(-1,1)$ ***y decreciente en*** $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

4.1.2) Máximos y mínimos relativos y absolutos de f(x)

$$f'(x)=0; \quad \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=0; \quad 1-x^2=0; \quad x=\pm 1$$

En x = – 1 hay un mínimo relativo porque la función pasa de decreciente a creciente.

En x = 1 hay un máximo relativo porque la función pasa de creciente a decreciente.

Para x = − 1, $f(-1)=\dfrac{-1}{(-1)^2+1}=\dfrac{-1}{2}$, *f(x) tiene un mínimo relativo en* $\left(-1,\dfrac{-1}{2}\right)$,

Para x = 1, $f(1)=\dfrac{1}{1^2+1}=\dfrac{1}{2}$, *f(x) tiene un máximo relativo en* $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$.

Podremos determinar los extremos absolutos, si los hay, cuando representemos la función.

Tras la representación (apartado siguiente) concluimos que:

f(x) tiene un mínimo relativo y absoluto en $\left(-1,\dfrac{-1}{2}\right)$ ***y***

f(x) tiene un máximo relativo y absoluto en $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$**.**

4.1.3 Representar f(x).

De f(x) conocemos: Dom f(x) = $\Re$*, asíntota horizontal y = 0, mínimo relativo* $\left(-1,\dfrac{-1}{2}\right)$ *y máximo relativo* $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$.

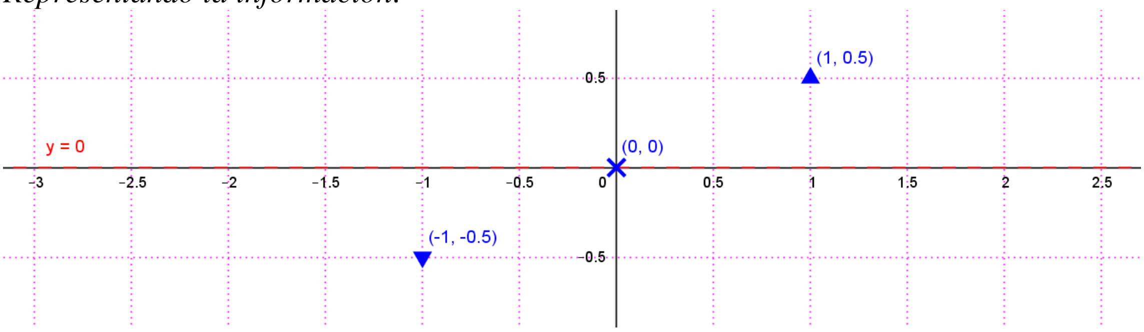
Para representar la función debemos calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.

$x=0,\quad f(0)=\dfrac{0}{0^2+1}=0 \;\rightarrow\; (0,0)$

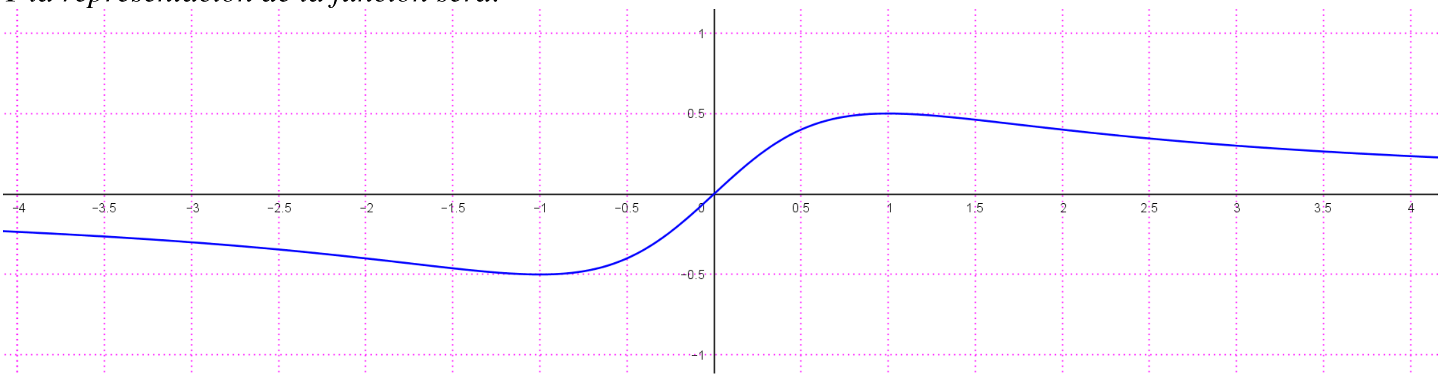
$f(x)=0,\quad \dfrac{x}{x^2+1}=0 \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; (0,0)$

punto de corte (0 , 0)

Representando la información:



Y la representación de la función será:



Por lo tanto, los extremos relativos son también los absolutos.