4.2 Dadas las funciones reales de variable real

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad y \quad g(x) = 8x$$

Se pide:

4.2.1 **(0.5 puntos)** Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f.*

4.2.2 **(0.25 puntos)** Dibujar las gráficas de ambas funciones.

4.2.3 **(1.75 puntos)** Calcular el área del recinto delimitado por el eje de abcisas, la rectas $x = 1$ y las gráficas de las dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

Solución:

4.2.1 $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Dom f(x),

$$x^2 = 0; \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad Dom\ f(x) = \Re - \{0\}$$

Asíntotas.

Verticales. La posible asíntota vertical es x = 0,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0} = \infty \quad \rightarrow \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

Horizontal,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y = 0 \text{ es la asíntota horizontal.}$$

Oblicua, como la función es un cociente de dos polinomios al tener a. horizontal no tiene a. oblicua.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3} \qquad \begin{array}{l} \text{para } x < 0,\ f'(x) > 0 \rightarrow \text{creciente en } (-\infty, 0) \\ \text{para } x > 0,\ f'(x) < 0 \rightarrow \text{decreciente en } (0, +\infty) \end{array}$$

Por lo tanto, Dom f(x) = ℜ ~ {0}, x = 0 es asíntota vertical, y = 0 es asíntota horizontal, f(x) es creciente en (–∞, 0) y es decreciente en (0 , +∞).

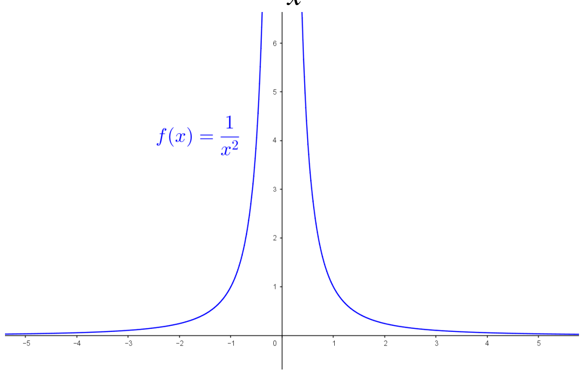
4.2.2 Dibujar la gráfica de ambas funciones.

f(x),

De f(x) conocemos: Dom f(x) = ℜ ~ {0}, x = 0 es asíntota vertical, y = 0 es asíntota horizontal, f(x) es creciente en (–∞, 0) y es decreciente en (0 , +∞).

¿Punto de corte con el eje OY? $f(x) = 0; \quad \frac{1}{x^2} = 0; \quad 1 = 0,$ *f(x) no corta a los ejes coordenados.*

La representación es:



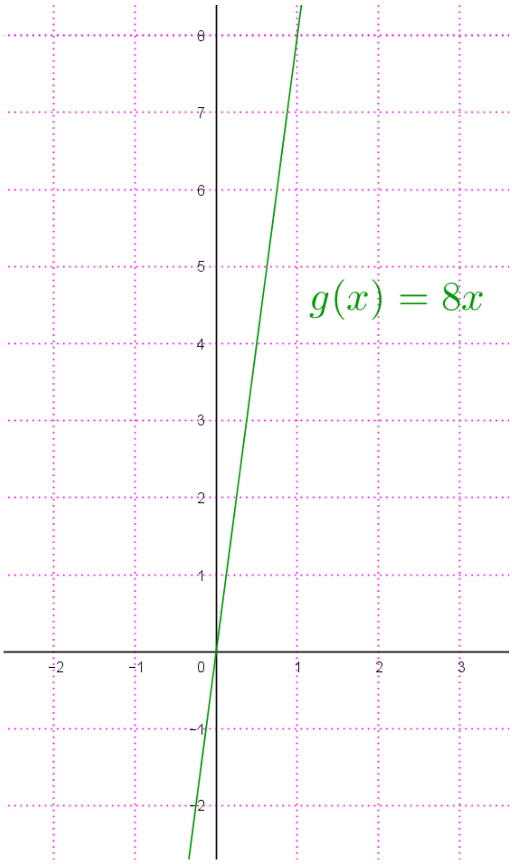
g(x) = 8 x,

g(x) es un polinomio de primer grado, gráficamente es una línea recta

$x = 0, \quad g(0) = 8 \cdot 0 = 0$

$x = 1, \quad g(1) = 8 \cdot 1 = 8$

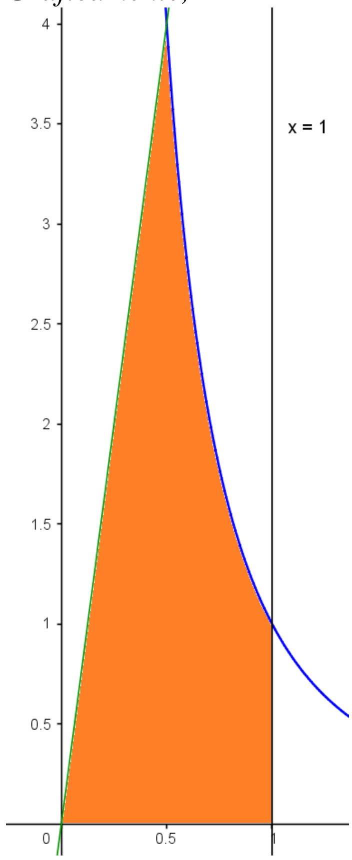
La representación es:



4.2.3 Área del recinto delimitado por el eje de abcisas, la rectas x = 1 y las gráficas de las dos funciones y = f(x) e y = g(x).

Corte entre f(x) y g(x), $\frac{1}{x^2} = 8x; \quad 1 = 8x^3; \quad x^3 = \frac{1}{8}; \quad x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

Gráficamente,



El área pedida la obtenemos mediante las siguientes integrales definidas:

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} 8x\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{8x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{-1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left[4x^2\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{-1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \left[4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot 0^2\right] + \left(\frac{-1}{1} - \frac{-1}{1/2}\right) = 1 + (-1 + 2) = 2$$

El área del recinto indicado es 2 u.a.