

2.1 Mediante un proceso de mezclado continuo de tres tanques interconectados, una planta química produce tres compuestos, X, Y, Z, ligados a unos valores reales x , y , z , respectivamente, llamados pseudodensidades. Las pseudodensidades en los tanques deben estar en equilibrio para mantener la concentración deseada de los productos. Los ingenieros han establecido las siguientes condiciones de equilibrio:

- **Tanque 1:** La suma de la pseudodensidad x , mas el triple de la pseudodensidad y , más la pseudodensidad z ha de valer 5.
- **Tanque 2:** La suma de α veces la pseudodensidad x , mas el doble de la pseudodensidad z debe anularse, donde α es el factor catalizador.
- **Tanque 3:** La pseudodensidad z ha de ser α veces la pseudodensidad y .

Se pide:

2.1.1 (1.25 puntos) Estudiar la existencia y el número de soluciones x , y , z (las posibles configuraciones de equilibrio) en función de los valores del factor catalizador α .

2.1.2 (1.25 puntos) Cuando el factor catalizador satisface $\alpha \neq -1$, el proceso alcanza estados de equilibrios factibles. En este caso, calcular, si existen, los valores x , y , z , en función del valor α .

Solución:

De las condiciones de equilibrio de cada tanque obtenemos las ecuaciones:

$$\text{Tanque 1: } x + 3y + z = 5$$

$$\text{Tanque 2: } \alpha x + 2z = 0$$

$$\text{Tanque 3: } z = \alpha y \rightarrow \alpha y - z = 0$$

$$\text{El sistema a estudiar es: } \begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ \alpha x + 2z = 0 \\ \alpha y - z = 0 \end{cases} \quad \text{y su matriz ampliada es: } A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ \alpha & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 \end{array} \right)$$

2.1.1

A es una matriz 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3. A' es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de A' es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 \\ 0 & \alpha & -1 \end{vmatrix} = \alpha^2 - 2\alpha + 3\alpha = \alpha^2 + \alpha; \quad \alpha^2 + \alpha = 0; \quad \alpha(\alpha + 1) = 0 \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + 1 = 0; \quad \alpha = -1 \end{cases}$$

Si $\alpha \neq -1$ y 0

$|A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$, y como el máximo rango de A' es 3 $\rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$ incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Si $\alpha = -1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos el rango de A,

En A, el menor de orden 2 correspondiente a $F_1 F_2$ y $C_2 C_3$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

En A', el menor de orden 3 correspondiente a $F_1 F_2 F_3$ y $C_2 C_3 C_4$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Luego, $\text{ran}(A) = 2 \neq 3 = \text{ran}(A') \rightarrow$ Sistema incompatible

Si $\alpha = 0$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, y que el menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$

En A', como las filas 2 y 3 son proporcionales $\text{ran}(A') \leq 2$ y como $\text{ran}(A) = 2 \rightarrow \text{ran}(A') = 2$:

Por lo tanto, $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A')$, luego el sistema es compatible indeterminado.

Solución, si $\alpha \neq -1$ y 0 , el sistema es compatible determinado (el sistema tiene una única solución),
si $\alpha = -1$, el sistema es incompatible (el sistema no tiene solución) y
si $\alpha = 0$, el sistema es compatible indeterminado (el sistema tiene infinitas soluciones).

2.1.2 Cuando el factor catalizador satisface $\alpha \neq -1$, el proceso alcanza estados de equilibrios factibles. En este caso, calcular, si existen, los valores x, y, z , en función del valor α .

Si $\alpha \neq -1$, tenemos dos posibilidades.

1ª) si $\alpha \neq -1$ y $\alpha \neq 0$, el sistema es compatible determinado

$$\text{El sistema a resolver es: } \begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ \alpha x + 2z = 0 \\ \alpha y - z = 0 \end{cases}$$

Lo resolvemos por Cramer (sabemos que $|A| = \alpha^2 + \alpha$)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & \alpha & -1 \end{vmatrix}}{\alpha^2 + \alpha} = \frac{-10\alpha}{\alpha^2 + \alpha} = \frac{-10\alpha}{\alpha(\alpha+1)} = \frac{-10}{(\alpha+1)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\alpha^2 + \alpha} = \frac{5\alpha}{\alpha(\alpha+1)} = \frac{5}{(\alpha+1)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{vmatrix}}{\alpha^2 + \alpha} = \frac{5\alpha^2}{\alpha(\alpha+1)} = \frac{5\alpha}{(\alpha+1)}$$

2ª) si $\alpha = 0$, el sistema es compatible indeterminado

Del estudio realizado en el apartado anterior (2.1.1 si $\alpha = 0$) el menor de orden 2 no nulo corresponde a 1ª y 2ª ecuaciones e incógnitas y, z . El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} 3y + z = 5 - x \\ 2z = 0 \end{cases} \rightarrow z = 0 \quad \text{Sustituyendo el valor de } z \text{ en la 1ª ecuación:}$$

$$3y + 0 = 5 - x; \quad 3y = 5 - x; \quad y = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x$$

La solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Solución: si $\alpha \neq -1$ los valores x, y, z , en función del valor α son:

$$\text{si } \alpha \neq 0, \begin{cases} x = \frac{-10}{\alpha + 1} \\ y = \frac{5}{\alpha + 1} \\ z = \frac{5\alpha}{\alpha + 1} \end{cases} \quad \text{y si } \alpha = 0, \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$