

2.2 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y el vector $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

2.2.1 (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones: $Ax = Bx + b$.

2.2.2 (0.75 puntos) Hallar el valor de $\det(A^5 (2B)^{-1})$.

2.2.3 (0.75 puntos) Calcular valores de α y β , si existen, que satisfacen $\alpha A + \beta B = I$, siendo I la matriz identidad.

Solución:

2.1.1 Resolver $Ax = Bx + b$.

A partir de la expresión anterior vamos a intentar despejar x .

$$Ax = Bx + b; \quad Ax - Bx = b; \quad (A - B)x = b \rightarrow x = (A - B)^{-1}b$$

Comprobemos que existe $(A - B)^{-1}$,

$$\text{Calculemos } A - B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A - B| = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7 \neq 0 \rightarrow \exists (A - B)^{-1}$$

Calculemos $(A - B)^{-1}$,

$$A - B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Y } (A - B)^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } x = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } x = \begin{pmatrix} -2/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}.$$

2.1.2 Calcular $|A^5 (2B)^{-1}|$

Considerando las propiedades de los determinantes:

$$|AB| = |A||B|, \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad \text{y} \quad |nA| = n^2 |A| \quad (\text{por ser } A \text{ } 2 \times 2)$$

$$|A^5 (2B)^{-1}| = |A|^5 |(2B)^{-1}| = |A|^5 \frac{1}{|2B|} = |A|^5 \frac{1}{4|B|} = 3^5 \frac{1}{4 \cdot 19} = \frac{243}{76}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \quad \text{y} \quad |B| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 4 = 19$$

$$\text{Solución: } |A^5 (2B)^{-1}| = \frac{243}{76}.$$

2.1.3 ¿ α, β ? / $\alpha A + \beta B = I$

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5\beta & -2\beta \\ 2\beta & 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha + 5\beta & -\alpha - 2\beta \\ \alpha + 2\beta & \alpha + 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 5\beta = 1 \\ -\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 5\beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 5\beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 1 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema formado por la 2ª y 3ª ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 & -1xI^a \\ \alpha + 3\beta = 1 & 2^a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \quad \text{sumando ambas ecuaciones} \quad \beta = 1$$

Sustituyendo el valor de β en la 1ª ecuación: $\alpha + 2 \cdot 1 = 0$; $\alpha = -2$

Comprobemos si esta solución cumple la 1ª ecuación del sistema de tres ecuaciones:

¿ $2 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 = 1$?; ¿ $-4 + 5 = 1$?; ¿ $1 = 1$? Sí.

Solución: $\alpha = -2$ y $\beta = 1$.