

3.2 Dado el plano $\pi: 2x + 3y - z = 0$ y los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(10, 0, -20)$, $C(0, 15, -30)$ y $D = (1, 2, -1)$, se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Estudiar si el triángulo ABC está contenido en el plano π .

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A , B y C .

3.2.3 (0.75 puntos) Calcular la distancia del punto D al plano π .

Solución:

3.2.1 ¿Triángulo $ABC \in$ Plano π ?

El triángulo ABC pertenecerá al plano π si los tres puntos (A , B y C) están en el plano.

Comprobémoslo:

$$¿A \in \pi?, \quad ¿2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 0 = 0? \quad \text{Sí}$$

$$¿B \in \pi?, \quad ¿2 \cdot 10 + 3 \cdot 0 - (-20) = 0?, \quad ¿40 = 0? \quad \text{No}$$

Por tanto, el triángulo ABC no pertenece al plano π

3.2.2 Coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A , B y C .

Obtendremos el punto pedido realizando los siguientes cálculos:

$$1) \text{ Sea } \sigma \text{ el plano formado por } A, B \text{ y } C \rightarrow \begin{cases} P_\sigma = A(0,0,0) \\ \vec{v}_1 = \vec{AB} = (10,0,-20) \\ \vec{v}_2 = \vec{AC} = (0,15,-30) \end{cases}$$

La ecuación del plano σ será:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 10 & 0 & -20 \\ 0 & 15 & -30 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 10 & 0 & -20 \\ 0 & 15 & -30 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 150z + 300x + 300y = 0 \rightarrow 2x + 2y + z = 0$$

2) Sea s la recta que pasa por D y es perpendicular al plano σ .

$$s: \begin{cases} P_s = D(1,2,-1) \\ \vec{v}_s = \vec{n}_\sigma = (2,2,1) \end{cases} \rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

3) Corte entre la recta s y el plano σ .

$$2(1 + 2\lambda) + 2(1 + 2\lambda) + (-1 + \lambda) = 0; \quad 2 + 4\lambda + 4 + 4\lambda - 1 + \lambda = 0; \quad 5 + 9\lambda = 0; \quad 9\lambda = -5; \\ \lambda = \frac{-5}{9}$$

4) Cálculo del punto proyección.

Sustituyendo el valor de λ obtenido anteriormente en la ecuación de la recta s :

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \cdot \frac{-5}{9} = \frac{-1}{9} \\ y = 1 + 2 \cdot \frac{-5}{9} = \frac{8}{9} \\ z = -1 + \frac{-5}{9} = \frac{-14}{9} \end{cases}$$

Las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A , B y C son

$$\left(\frac{-1}{9}, \frac{8}{9}, \frac{-14}{9} \right).$$

3.2.3 Calcular la distancia del punto D al plano π .

$$d(D, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - (-1)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{|9|}{\sqrt{14}} = \frac{9}{\sqrt{14}}$$

La distancia del punto D al plano π es: $\frac{9}{\sqrt{14}}.$