

4.2 Un arquitecto está diseñando un pequeño invernadero para un jardín. El suelo del invernadero tiene forma de triángulo para maximizar la eficiencia y la captación de luz. El perímetro total del invernadero está fijado en 60 metros para cumplir con las restricciones medioambientales de la zona, uno de los lados del triángulo mide x metros y los otros dos lados tienen la misma longitud. Se pide:

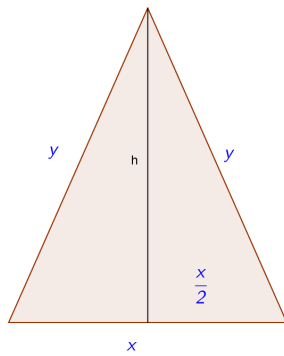
4.2.1 (1 punto) Deducir la expresión de la función $A(x)$ que representa el área del suelo del invernadero.

4.2.2 (1.5 puntos) El arquitecto define una función de eficiencia estructural, $f(x)$, que se calcula como el cuadrado del área del suelo del invernadero. Obtener el valor de x para el que la eficiencia estructural es máxima y hallar el área en este caso.

Solución:

4.2.1 Deducir la expresión de la función $A(x)$ que representa el área del suelo del invernadero.

De los datos del problema sabemos que el suelo del invernadero es un triángulo isósceles (uno de los lados del triángulo mide x metros y los otros dos lados tienen la misma longitud) de perímetro 60 m.



La relación entre x e y es: $x + 2y = 60$; $2y = 60 - x$; $y = 30 - \frac{x}{2}$

$A(x) = \frac{xh}{2}$, obtengamos el valor de h en función de x . Para ello aplicamos el teorema de Pitágoras en cualquiera de los triángulos rectángulos:

$$\left(30 - \frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2; \quad 900 - 30x + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4} + h^2; \quad h^2 = 900 - 30x;$$

$$h = \sqrt{900 - 30x}$$

Como h es una longitud, $h > 0$. Por tanto $900 - 30x > 0$; $900 > 30x$; $30 > x$.

Finalmente, $A(x) = \frac{x\sqrt{900 - 30x}}{2} \quad 0 < x < 30.$

4.2.2 El arquitecto define una función de eficiencia estructural, $f(x)$, que se calcula como el cuadrado del área del suelo del invernadero. Obtener el valor de x para el que la eficiencia estructural es máxima y hallar el área en este caso.

$$A(x) = \frac{x\sqrt{900 - 30x}}{2} \quad 0 < x < 30$$

$$f(x) = [A(x)]^2 = \left(\frac{x\sqrt{900 - 30x}}{2}\right)^2 = \frac{x^2(900 - 30x)}{4} = \frac{900x^2 - 30x^3}{4} \quad 0 < x < 30$$

Máximo de $f(x)$,

$$f'(x) = \frac{1800x - 90x^2}{4}; \quad \frac{1800x - 90x^2}{4} = 0; \quad 1800x - 90x^2 = 0; \quad 90x(20 - x) = 0 \begin{cases} 90x = 0; & x = 0 \\ 20 - x = 0; & x = 20 \end{cases}$$

Estudiemos el signo de $f'(x)$ en los intervalos $(0, 20)$ y $(20, 30)$,

$$x = 10, \quad f'(10) = \frac{1800 \cdot 10 - 90 \cdot 10^2}{4} = 2250 > 0$$

$$x = 25, \quad f'(25) = \frac{1800 \cdot 25 - 90 \cdot 25^2}{4} = -2812.5 < 0$$

Como $f(x)$ a la izquierda de $x = 20$ es creciente y a la derecha decreciente, este máximo local es el absoluto.

Para $x = 20$, área del triángulo, $A(20) = \frac{20 \sqrt{900 - 30 \cdot 20}}{2} = 10\sqrt{300} = 100\sqrt{3}$

Por tanto, la eficiencia estructural es máxima para $x = 20 \text{ m}$ y en este caso el área del triángulo es de $100\sqrt{3} \text{ m}^2 \cong 173.2051 \text{ m}^2$.