

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Dados los puntos $A=(1,-2,3)$ y $B=(0,2,1)$, se pide:

- a) La ecuación paramétrica de la recta que pasa por ambos puntos. (1,1 puntos)
 b) La ecuación del plano π que está a igual distancia de A y de B. (1,1 puntos)
 c) La distancia al origen de la recta intersección del plano $2y-z=0$ con el plano π del apartado b). (1,1 puntos)

Solución:

- a) Ecuación paramétrica de la recta que pasa por A y B.

$$\text{De la recta } r \text{ sabemos } \begin{cases} \text{punto } A(1,-2,3) \\ \text{vector director } \overrightarrow{AB} = (-1,4,2) \end{cases}$$

Por lo tanto la ecuación paramétrica de la recta r es:

$$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathfrak{R}$$

- b) El plano que está a igual distancia de los puntos A y B pasará por el punto medio del segmento AB y será perpendicular al vector \overrightarrow{AB}

$$M \text{ punto medio de } \overline{AB} = \left(\frac{1+0}{2}, \frac{-2+2}{0}, \frac{3+1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, 0, 2 \right)$$

$\overrightarrow{AB}(-1,4,2)$, este es un vector ortogonal al plano.

La ecuación del plano buscado será $-x + 4y - 2z + D = 0$ con la condición de que pase por el punto M, luego

$$\frac{-1}{2} + 4 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + D = 0 \rightarrow \frac{-1}{2} - 4 + D = 0 \rightarrow D = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$$

La ecuación del plano será $-x + 4y - 2z + \frac{9}{2} = 0 \quad -2x + 8y - 4z + 9 = 0$

- c)

La ecuación de la recta s, intersección de los dos planos, será $s: \begin{cases} -2x + 8y - 4z + 9 = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$

La distancia del origen (O) a la recta s la calculamos mediante la expresión,

$$d(O, s) = \frac{\left| \overrightarrow{P_s O} \times \overrightarrow{v_s} \right|}{\left| \overrightarrow{v_s} \right|} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Necesitamos encontrar un punto y un vector director de la recta } s. \\ \text{Obtengamos las ecuaciones paramétricas de } s. \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} -2x + 8y - 4z + 9 = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \quad \text{como } \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \quad x, y \text{ incógnitas principales.}$$

$$\begin{cases} -2x + 8y = -9 + 4z \\ 2y = z \end{cases} \rightarrow y = \frac{z}{2}$$

sustituyendo en la 1ª ecuación

$$-2x + 8\frac{z}{2} = -9 + 4z \rightarrow -2x + 4z = -9 + 4z \rightarrow -2x = -9 \rightarrow x = \frac{9}{2}$$

$$\text{luego } s: \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \lambda \in \mathfrak{R} \rightarrow \begin{matrix} P_s \left(\frac{9}{2}, 0, 0 \right) \\ \vec{v}_s \left(0, \frac{1}{2}, 1 \right) \end{matrix}$$

$$\vec{P}_s O = (0, 0, 0) - \left(\frac{9}{2}, 0, 0 \right) = \left(-\frac{9}{2}, 0, 0 \right)$$

$$\vec{P}_s O \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{9}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -\frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -\frac{9}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(0, \frac{9}{2}, -\frac{9}{4} \right)$$

$$\left| \vec{P}_s O \times \vec{v}_s \right| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{9}{2} \right)^2 + \left(-\frac{9}{4} \right)^2} = \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{81}{16}} = \sqrt{\frac{324 + 81}{16}} = \sqrt{\frac{405}{16}} = \frac{\sqrt{405}}{4}$$

$$\left| \vec{v}_s \right| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$d(O, s) = \frac{\frac{\sqrt{405}}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{405}}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{405}{5}} = \frac{1}{2} \sqrt{81} = \frac{9}{2} \text{ u.l.}$$