EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Sea T un triángulo de perímetro 60 cm. Uno de los lados del triángulo T mide x cm y los otros dos lados tienen la misma longitud.

a) Deducir razonadamente las expresiones de las funciones A y f tales que:

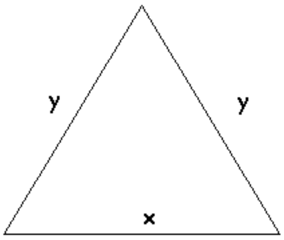
$A(x)$ = Área del triángulo T.

$f(x) = \{A(x)\}^2$ (*1,3 puntos*).

b) Obtener, razonadamente, el valor de x para el que $f(x)$ alcanza el valor máximo (*2 puntos*).

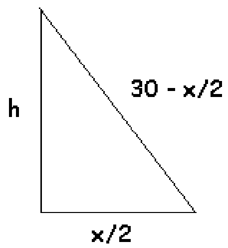
Solución:

a) El triángulo T es un triángulo isósceles, por lo tanto,



$$x + 2y = 60$$
$$2y = 60 - x$$
$$y = 30 - \frac{x}{2}$$

Calculamos la altura del triángulo aplicando el teorema de Pitágoras



$$h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(30 - \frac{x}{2}\right)^2$$
$$h^2 + \frac{x^2}{4} = 900 - 30x + \frac{x^2}{4}$$
$$h^2 = 900 - 30x$$
$$h = \sqrt{900 - 30x}$$

Las expresiones de las funciones serán:

$$A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{900 - 30x}$$

$$f(x) = \{A(x)\}^2 = \left(\frac{1}{2}x\sqrt{900 - 30x}\right)^2 = \frac{1}{4}x^2(900 - 30x) = \frac{1}{4}\left(900x^2 - 30x^3\right)$$

Por ser un triángulo isósceles, lado igual y, debe cumplirse que 2 y > x; luego 60 – x > x; 60 >2 x, es decir, x<30.

Para que haya triángulo debe ser x>0.

Por lo que el dominio de las funciones A(x) y f(x) es el intervalo abierto (0 , 30)

b) Busquemos el máximo de f(x)

$$f'(x) = \frac{1}{4}\left(1800x - 90x^2\right)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{4}\left(1800x - 90x^2\right) = 0 \rightarrow 1800x - 90x^2 = 0 \rightarrow 20x - x^2 = 0 \left\langle \begin{matrix} x = 0 \\ x = 20 \end{matrix} \right.$$

Como Dom f(x) = (0,30) sólo consideramos la solución x=20

$$f''(x) = \frac{1}{4}(1800 - 180x) = 450 - 45x$$

$$\textit{Para } x = 20 \quad f''(20) = 450 - 900 = -450 < 0$$

f(x) tiene un máximo relativo para x = 20.

f(x) es una función polinómica, luego es continua; en sus extremos, f(0)=0 y f(30)=0, toma valores inferiores a f(20)=30000; por lo que en x = 20 f(x) alcanza su máximo absoluto.

f(x) alcanza su máximo para x = 20.