

## EJERCICIO B

**PROBLEMA 3.** Hallar todos los valores reales  $z$  tales que  $\int_0^z \frac{-16}{x^2 - 2x - 15} dx = \ln 25$  (3,3 puntos).

*Solución:*

Estudiamos la continuidad de la función integrando,  $y = \frac{-16}{x^2 - 2x - 15}$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Luego  $y = \frac{-16}{x^2 - 2x - 15}$  es continua en  $\mathfrak{R} - \{-3, 5\}$

En primer lugar calculamos la integral indefinida, descomponemos el integrando en suma de dos fracciones

$$\frac{-16}{x^2 - 2x - 15} = \frac{-16}{(x-5)(x+3)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-5)}{(x-5)(x+3)}$$

$$-16 = A(x+3) + B(x-5)$$

$$-16 = (A+B)x + (3A-5B) \rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 3A-5B=-16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5A+5B=0 \\ 3A-5B=-16 \end{cases} \rightarrow 8A=-16 \rightarrow A=-2$$

sustituyendo en 1ª ecuación  $-2+B=0 \rightarrow B=2$

$$\int \frac{-16}{x^2 - 2x - 15} dx = \int \left( \frac{-2}{x-5} + \frac{2}{x+3} \right) dx = \int \frac{-2}{x-5} dx + \int \frac{2}{x+3} dx = -2 \ln|x-5| + 2 \ln|x+3| + C =$$

$$= \ln(x+3)^2 - \ln(x-5)^2 + C = \ln \left( \frac{x+3}{x-5} \right)^2 + C$$

Calculemos ahora la integral definida, el cálculo que realizaremos es válido cuando la función integrando es continua en el intervalo  $[0, z]$ .

$$\int_0^z \frac{-16}{x^2 - 2x - 15} dx = \left[ \ln \left( \frac{x+3}{x-5} \right)^2 \right]_0^z = \ln \left( \frac{z+3}{z-5} \right)^2 - \ln \left( \frac{3}{-5} \right)^2$$

Buscamos  $z$  de manera que,

$$\ln \left( \frac{z+3}{z-5} \right)^2 - \ln \left( \frac{3}{-5} \right)^2 = \ln 25 \rightarrow \ln \left( \frac{z+3}{z-5} \right)^2 = \ln \frac{9}{25} + \ln 25 \rightarrow \ln \left( \frac{z+3}{z-5} \right)^2 = \ln \left( \frac{9}{25} \cdot 25 \right) \rightarrow \ln \left( \frac{z+3}{z-5} \right)^2 = \ln 9$$

$$\left( \frac{z+3}{z-5} \right)^2 = 9 \rightarrow \frac{z+3}{z-5} = \pm 3 \begin{cases} \frac{z+3}{z-5} = 3 \rightarrow z+3 = 3z-15 \rightarrow 18 = 2z \rightarrow z = 9 \\ \frac{z+3}{z-5} = -3 \rightarrow z+3 = -3z+15 \rightarrow 4z = 12 \rightarrow z = 3 \end{cases}$$

En el caso  $z = 9$ , el integrando no es continuo en  $[0, 9]$  por lo que esta solución no es válida.

En el caso  $z = 3$ , el integrando es continuo en el intervalo  $[0, 3]$ , esta solución es válida.

*Solución*  $z = 3$ .