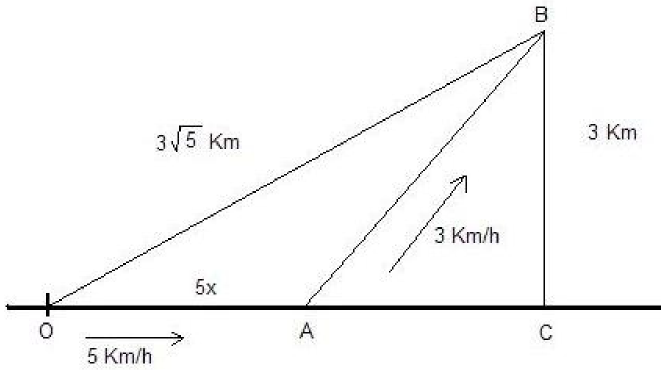
EJERCICIO B

PROBLEMA 4.1. Desde un punto N de la orilla del mar, un nadador debe alcanzar una boya que flota a 3 kilómetros de la costa y dista $3\sqrt{5}$ kilómetros del punto N. Si recorriendo la orilla (que se supone recta y plana), su velocidad media es de 5 kilómetros por hora y nadando, de 3 kilómetros por hora, ¿cuánto tiempo deberá caminar hasta lanzarse al mar, para alcanzar la boya en el menor tiempo posible? (3,3 puntos)

Solución:
La representación gráfica del problema es,



OA distancia que recorre por la orilla.

AB distancia que recorre nadando

Si x = tiempo que camina por la orilla

OA = 5 x
calculemos AB.

En el triángulo rectángulo OCB, ángulo recto en C, aplicamos el teorema de Pitágoras,
$\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 3^2 + OC^2 \quad \rightarrow \quad 45 = 9 + OC^2 \quad \rightarrow \quad 36 = OC^2 \quad \rightarrow \quad OC = 6$ *por lo tanto AC = 6 – 5 x.*
En el triángulo rectángulo ACB,

$$AB^2 = 3^2 + (6-5x)^2 \quad \rightarrow \quad AB^2 = 9 + 36 - 60x + 25x^2 \quad \rightarrow \quad AB^2 = 45 - 60x + 25x^2 \quad \rightarrow \quad AB = \sqrt{45 - 60x + 25x^2}$$

nadando estará $\dfrac{\sqrt{45-60x+25x^2}}{3}$ *horas*

El tiempo empleado en ir desde N hasta B será: $T = x + \dfrac{\sqrt{45-60x+25x^2}}{3}$

Como 45 – 60 x + 25 x^2 *= (5 x – 6)*^{2} *+ 9 > 0 para cualquier valor de x, Dom T =* $[0, +\infty)$

Queremos que el tiempo empleado sea el menor posible. Buscamos los mínimos relativos de T.

$$T' = 1 + \frac{1}{3}\,\frac{50x-60}{2\sqrt{45-60x+25x^2}} = 1 + \frac{50x-60}{6\sqrt{45-60x+25x^2}} = 1 + \frac{25x-30}{3\sqrt{5}\sqrt{9-12x+5x^2}}$$

$$T' = 0$$

$$1 + \frac{25x-30}{3\sqrt{5}\sqrt{9-12x+5x^2}} = 0 \quad \rightarrow \quad 3\sqrt{5}\sqrt{9-12x+5x^2} + 25x - 30 = 0 \quad \rightarrow \quad 3\sqrt{5}\sqrt{9-12x+5x^2} = 30 - 25x$$

$$\left(3\sqrt{5}\sqrt{9-12x+5x^2}\right)^2 = (30-25x)^2 \quad \rightarrow \quad 45\left(9-12x+5x^2\right) = 900 - 1500x + 625x^2$$

$$9\left(9-12x+5x^2\right) = 180 - 300x + 125x^2 \quad \rightarrow \quad 81 - 108x + 45x^2 = 180 - 300x + 125x^2$$

$$80x^2 - 192x + 99 = 0$$

$$x = \frac{192 \pm \sqrt{(-192)^2 - 4.80.99}}{2.80} = \frac{192 \pm \sqrt{5184}}{160} = \frac{192 \pm 72}{160} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{192+72}{160} = \dfrac{264}{160} = \dfrac{33}{20} = 1'65 \\[2ex] x_2 = \dfrac{192-72}{160} = \dfrac{120}{160} = \dfrac{3}{4} = 0'75 \end{cases}$$

Como estamos resolviendo una ecuación irracional, debemos comprobar estos valores de x en la ecuación inicial,

$x = 1'65$

$$1+\frac{25\,.\,1'65-30}{3\sqrt{5}\sqrt{9-12\,.\,1'65+5\,.\,1'65^2}}=0$$

x = 1´65 no es solución.

$$1+\frac{11'25}{3\sqrt{5}\sqrt{2'8125}}=0 \quad\rightarrow\quad 1+\frac{11'25}{11'25}=0 \quad\rightarrow\quad 2=0 \quad \textit{Falso}$$

$x = 0'75$

$$1+\frac{25\,.\,0'75-30}{3\sqrt{5}\sqrt{9-12\,.\,0'75+5\,.\,0'75^2}}=0$$

x = 0,75 es solución

$$1+\frac{-11'25}{3\sqrt{5}\sqrt{2'8125}}=0 \quad\rightarrow\quad 1-\frac{11'25}{11'25}=0 \quad\rightarrow\quad 0=0 \quad \textit{Cierto}$$

Este valor que anula T´ divide el dominio de T en dos intervalos, calculemos el signo de T´ en cada uno de ellos,

int	x	T'
$0-0'75$	$0'5$	$1+\frac{25.0'5-30}{3\sqrt{5}\sqrt{5\,.\,0'5^2-12\,.\,0'5+9}}=1+\frac{-17'5}{3\sqrt{5}\sqrt{4'25}}=-0'265\ <0$
$0'75-$	1	$1+\frac{25.1-30}{3\sqrt{5}\sqrt{5\,.\,1^2-12\,.\,1+9}}=1+\frac{-5}{3\sqrt{5}\sqrt{2}}=0'473\ >0$

La función T es decreciente en $(0,\,0'75)$
creciente en $(0'75,\,+\infty)$

En x = 0´75 la función T tiene un mínimo relativo, que además es el mínimo absoluto ya que en ese punto la función pasa de decreciente a creciente.

Solución: hasta lanzarse al mar deberá caminar durante 0´75 h, es decir, 45 minutos.