

PROBLEMA B.2. Se da la recta r de ecuación $r: \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+5y-z=0 \end{cases}$ y el plano π de ecuación $\pi: 2x+y+nz=p$, donde n y p son dos parámetros reales.

Obtener **razonadamente**:

- Todos los valores de n para los que la intersección de la recta r y el plano π es un punto. (4 puntos).
- El valor de n y el valor de p para los que la recta r está contenida en el plano π . (3 puntos).
- El valor de n y todos los valores de p para los que la recta r no corta al plano π . (3 puntos).

Solución:

a) ¿ $n?$ / $r \cap \pi$ sea un punto.

Para que el corte entre la recta r y el plano π sea un punto, el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano debe tener solución única.

El sistema que debemos considerar es: $\begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+5y-z=0 \\ 2x+y+nz=p \end{cases}$, como es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

para que tenga solución única debe cumplirse que $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & n \end{vmatrix} = 5n - 2 + 4 + 20 + 1 + 2n = 7n + 23$$

$$7n + 23 \neq 0; \quad 7n \neq -23; \quad n \neq \frac{-23}{7}$$

Luego, $r \cap \pi$ es un punto para $n \neq \frac{-23}{7}$

b) ¿ n y $p?$ / $r \subset \pi$

Para que esto ocurra, el corte entre r y π debe ser una línea recta (la r) y para ello el sistema anterior debe ser compatible indeterminado con $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 2$. (Siendo A la matriz de coeficientes del sistema anterior y A' la matriz ampliada)

De lo estudiado en el apartado anterior, cuando $n = \frac{-23}{7} \rightarrow |A| = 0$ y como el siguiente menor de orden 2 de A ,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 2 = 7 \neq 0, \text{ podemos afirmar que para ese valor de } n \text{ el rango de } A \text{ es } 2.$$

Para que el rango de A' sea 2, debe cumplirse que el menor de orden tres obtenido de A' orlando al menor de orden 2 no nulo anterior la tercera fila y la cuarta columna sea nulo, es decir,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & p \end{vmatrix} = 0; \quad 5p + 1 - 10 + 2p = 0; \quad 7p - 9 = 0; \quad p = \frac{9}{7}$$

Por lo que la recta r está contenida en el plano π cuando $n = \frac{-23}{7}$ y $p = \frac{9}{7}$.

c) Para que la recta r no corte al plano π , el sistema planteado en el apartado a) debe ser incompatible.

$$\text{La matriz ampliada de aquel sistema es: } A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & n & p \end{array} \right)$$

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 2 = 7 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A) \geq 2$$

Por lo tanto, para que el sistema sea incompatible debe ser $\text{rang}(A) = 2$ y $\text{rang}(A') = 3$.

De lo estudiado en el apartado anterior, $\text{rang}(A) = 2$ cuando $n = \frac{-23}{7}$.

Para que $\text{rang}(A') = 3$, debe ser $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & p \end{vmatrix} \neq 0$ y según lo calculado en b) esto se cumple para $p \neq \frac{9}{7}$.

Es decir, la recta r no corta al plano π cuando $n = \frac{-23}{7}$ y $p \neq \frac{9}{7}$.