

OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2x + 5y = a \\ -x - 4y = b \\ 2x + y = c \end{cases}$$
, donde a , b y c son tres

números reales. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- La relación que deben verificar los números a , b y c para que el sistema sea compatible. (4 puntos)
- La solución del sistema cuando $a = -1$, $b = 2$ y $c = 3$. (2 puntos)
- La solución del sistema cuando los números a , b y c verifican la relación $a = c = -2b$. (4 puntos)

Solución:

Del sistema
$$\begin{cases} 2x + 5y = a \\ -x - 4y = b \\ 2x + y = c \end{cases}$$
 obtenemos la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A' = \begin{pmatrix} 2 & 5 & a \\ -1 & -4 & b \\ 2 & 1 & c \end{pmatrix}$

a) Para que el sistema sea compatible, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A')$

Calculemos el rango de A .

Como A es 3×2 , el máximo rango de A será 2.

$$|2| = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 5 = -3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \quad \text{por lo tanto } \text{ran}(A) = 2$$

Para que $\text{ran}(A') = 2$, debe cumplirse que
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & a \\ -1 & -4 & b \\ 2 & 1 & c \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned} -8c - a + 10b + 8a - 2b + 5c &= 0 \\ 7a + 8b - 3c &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente, para que el sistema se compatible la relación entre a , b y c debe ser $7a + 8b - 3c = 0$

b) Para $a = -1$, $b = 2$ y $c = 3$.

Comprobemos que es sistema es compatible, $7(-1) + 8 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -7 + 16 - 9 = 0$, por lo tanto el sistema es compatible.

Para resolver el sistema usamos las ecuaciones e incógnitas correspondientes al menor de orden 2 no nulo calculado en el apartado anterior. Es decir, el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ -x - 4y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{4 - 10}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2 \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{4 - 1}{-3} = \frac{3}{-3} = -1 \end{aligned}$$

Para $a = -1$, $b = 2$ y $c = 3$, la solución del sistema es $x = 2$ e $y = -1$

c) Si $a = c = -2b$, veamos si cumplen la relación $7a + 8b - 3c = 0$.

$7(-2b) + 8b - 3(-2b) = -14b + 8b + 6b = 0$, la cumple. Luego el sistema será compatible

Según lo realizado en el apartado anterior, el sistema a resolver será:

$$\begin{cases} 2x + 5y = -2b \\ -x - 4y = b \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -2b & 5 \\ b & -4 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{8b - 5b}{-3} = \frac{3b}{-3} = -b \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2b \\ -1 & b \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2b - 2b}{-3} = \frac{0}{-3} = 0 \end{aligned}$$

Si $a = c = -2b$, la solución del sistema es $x = -b$ e $y = 0$.