PROBLEMA B.1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} (1-\alpha)\,x+(2\alpha+1)\,y+(2\alpha+2)\,z=\alpha \\ \alpha\,x+\alpha\,y=2\alpha+2 \\ 2x+(\alpha+1)y+(\alpha-1)\,z=\alpha^2-2\,\alpha+9 \end{cases}$

Donde α es un parámetro real. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha=1$. *(3 puntos)*

b) **La justificación razonada** de si el sistema es compatible o incompatible cuando $\alpha=2$. *(3 puntos)*

c) Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿Soluciones para $\alpha=1$?

Para $\alpha=1$ el sistema a resolver es:

$\begin{cases} 3\,y+4\,z=1 \\ x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{cases}$ *La matriz ampliada de este sistema es:* $M'=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right)$

Calculemos el rango de M,

$$\left.\begin{array}{l} |4|=4\neq 0 \quad\rightarrow\quad ran(M)\geq 1 \\[2ex] \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-4\neq 0 \quad\rightarrow\quad ran(M)\geq 2 \\[2ex] \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=(F_3=2\,.\,F_2)=0 \end{array}\right\}\rightarrow\quad ran(M)=2$$

Calculemos el rango de M´,

Considerando el estudio realizado anteriormente ran(M´) ≥ 2, el menor de orden 3 de M´ por estudiar es:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \end{vmatrix}=(F_3=2\,.\,F_2)=0 \quad\rightarrow\quad ran(M')=2$$

Luego, ran (M) = ran (M´) = 2 < 3 = nº incógnitas → Es un sistema compatible indeterminado.

Para resolver el sistema utilizamos las ecuaciones e incógnitas correspondientes al menor de orden 2 no nulo. Es decir, 1ª y 2ª ecuación y como incógnitas z e y.

El sistema a resolver será:

$\begin{cases} 3\,y+4\,z=1 \\ y=4-x \end{cases}$ *sustituyendo el valor de y que da la 2ª ecuación en la 1ª,*

$3\,(4-x)+4\,z=1;\quad 12-3\,x+4\,z=1;\quad 4\,z=1-12+3\,x;\quad 4\,z=-11+3\,x;\quad z=\dfrac{-11+3x}{4}$

Finalmente, ***para*** $\boldsymbol{\alpha = 1}$ ***las soluciones del sistema son:*** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = \dfrac{-11 + 3\lambda}{4} \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$

b) Para $\alpha = 2$ *el sistema a resolver es:*

$\begin{cases} -x + 5y + 6z = 2 \\ 2x + 2y \qquad = 6 \\ 2x + 3y + z \ = 9 \end{cases}$ *La matriz ampliada de este sistema es:* $N' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \end{array}\right)$

Calculemos el rango de N,

$$\left.\begin{array}{l} |-1| = -1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(N) \geq 1 \\ \\ \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 10 = -12 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(N) \geq 2 \\ \\ \begin{vmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 36 - 24 - 10 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(N) = 2$$

Calculemos el rango de N´,

Considerando el estudio realizado anteriormente ran(N´) ≥ 2*, el menor de orden 3 de N´ por estudiar es:*

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -18 + 12 + 60 - 8 + 18 - 90 = -26 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(N') = 3$$

Luego, ran (N) = 2 $\neq$ *3 = ran (N´)* $\rightarrow$ *Es un sistema incompatible.*

Para $\boldsymbol{\alpha = 2}$ ***el sistema es incompatible.***

c) ¿Valores de α *para los que es S.C.D.?*

$\begin{cases} (1-\alpha)\,x + (2\alpha+1)\,y + (2\alpha+2)\,z = \alpha \\ \quad \alpha\,x + \qquad \alpha\,y \qquad\qquad = 2\alpha + 2 \\ \quad 2x + \ (\alpha+1)y + (\alpha-1)\,z \ = \alpha^2 - 2\alpha + 9 \end{cases}$ *La matriz ampliada de este sistema es:* $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1-\alpha & 2\alpha+1 & 2\alpha+2 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 & 2\alpha+2 \\ 2 & \alpha+1 & \alpha-1 & \alpha^2 - 2\alpha + 9 \end{array}\right)$

La matriz de coeficientes, A, es 3 x 3, por tanto el máximo rango de A es 3

La matriz ampliada, A´, es 3 x 4, por tanto el máximo rango de A´ es 3.

Empezamos estudiando la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-\alpha & 2\alpha+1 & 2\alpha+2 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 2 & \alpha+1 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (desarrollando \ por \ F_2) = -\alpha \begin{vmatrix} 2\alpha+1 & 2\alpha+2 \\ \alpha+1 & \alpha-1 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} 1-\alpha & 2\alpha+2 \\ 2 & \alpha-1 \end{vmatrix} =$$

(multiplicamos los binomios correspondientes),

$$\left\{\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 & 2\alpha & +1 & & 2\alpha & +2 & & \alpha & -1 \\
 & \alpha & -1 & & \alpha & +1 & & -\alpha & +1 \\ \hline
 & -2\alpha & -1 & & +2\alpha & +2 & & +\alpha & -1 \\
2\alpha^2 & +\alpha & & 2\alpha^2 & +2\alpha & & -\alpha^2 & +\alpha & \\ \hline
2\alpha^2 & -\alpha & -1 & 2\alpha^2 & +4\alpha & +2 & -\alpha^2 & +2\alpha & -1
\end{array}\right\}$$

$$=-\alpha\left(2\alpha^2-\alpha-1-2\alpha^2-4\alpha-2\right)+\alpha\left(-\alpha^2+2\alpha-1-4\alpha-4\right)=-\alpha\left(-5\alpha-3\right)+\alpha\left(-\alpha^2-2\alpha-5\right)=$$
$$=\alpha\left(5\alpha+3-\alpha^2-2\alpha-5\right)=\alpha\left(-\alpha^2+3\alpha-2\right)$$

$$\alpha\left(-\alpha^2+3\alpha-2\right)=0\left\langle\begin{array}{l}\alpha=0\\ -\alpha^2+3\alpha-2=0\end{array}\right.$$

Resolviendo la ecuación de 2º grado por Ruffini,

$$\begin{array}{c|ccc}
 & -1 & 3 & -2 \\
1 & & -1 & 2 \\ \hline
 & -1 & 2 & 0 \\
2 & & -2 & \\ \hline
 & -1 & 0 &
\end{array} \quad \rightarrow \quad \alpha_1=1 \quad y \quad \alpha_2=2$$

Luego, para $\alpha \neq 0, 1, 2$ ran(A) = 3, como ran(A´) ≥ ran(A) y ran(A´) ≤ 3, también ran (A´) = 3; es decir, ran(A) = ran(A´) = 3 = nº de incógnitas → Sistema compatible determinado.

Sabemos que para $\alpha = 0, 1, 2$ el sistema no será compatible determinado, aunque es fácilmente justificable:

- *Para $\alpha = 1$, visto en apartado a), S. C. Indeterminado*
- *Para $\alpha = 2$, visto en apartado b), S. Incompatible*
- *Para $\alpha = 0$*

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \end{array}\right) \quad F_2 \text{ es la ecuación } 0 = 2 \text{ (Falso), luego S. Incompatible}$$

Finalmente, ***el sistema es compatible y determinado para*** $\alpha \in \Re - \{0, 1, 2\}$