PROBLEMA B.1. Se da la matriz $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La comprobación de que $A^{-1} = 5^{-1} A^t$, siendo A^t la matriz traspuesta de A. *(4 puntos)*

b) Los valores del parámetro real λ para los cuales $A - \lambda I$ no es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. *(3 puntos)*

c) El determinante de una matriz cuadrada B cuyo determinante es mayor que 0 y verifica la ecuación $B^{-1} = B^t$. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿ $A^{-1} = 5^{-1} A^t$?

Calculemos A^{-1}. Comprobemos si existe A^{-1}.

$$|A| = \begin{vmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 5\sqrt{5} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \exists\, A^{-1}$$

Calculemos A^{-1},

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 0 & -2\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & -2\sqrt{5} \\ 0 & 2\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 0 & -2\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Y, $$A^{-1} = \frac{1}{5\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 0 & -2\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & -2/5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{5} A^t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $A^{-1} = 5^{-1} A^t$.

Otra forma de realizar la comprobación es la siguiente:

Partimos de $A^{-1} = 5^{-1} A^t$,

Multiplicamos por la derecha por A, $A^{-1} A = 5^{-1} A^t A$

Como, $A^{-1} A = I$ (siendo I la matriz identidad de orden 3), $I = 5^{-1} A^t A \rightarrow A^t A = 5\, I$. *Comprobemos esta última igualdad.*

$$A^t A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5\, I \quad c.q.c$$

Por tanto, $A^{-1} = 5^{-1} A^t$.

b) ¿ $\lambda \in \Re$? / A – λ I no es invertible

Calculemos A – λ I,

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{5}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Para que A – λ I no sea invertible, / A – λ I / = 0

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} \sqrt{5}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\left(\sqrt{5}-\lambda\right)(1-\lambda)^2+4\left(\sqrt{5}-\lambda\right)=\left(\sqrt{5}-\lambda\right)\left[(1-\lambda)^2+4\right]$$

Resolvamos la ecuación:

$$\left(\sqrt{5}-\lambda\right)\left[(1-\lambda)^2+4\right]=0 \quad \left\langle \begin{array}{l} \sqrt{5}-\lambda=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=\sqrt{5} \\ (1-\lambda)^2+4=0 \quad \rightarrow \quad (1-\lambda)^2=-4 \quad \rightarrow \quad 1-\lambda=\pm\sqrt{-4} \quad \text{no existe} \end{array} \right.$$

Solución: A – λ I no es invertible para $\lambda = \sqrt{5}$.

c) ¿ /B / ? / B es una matriz cuadrada, / /B / > 0 y $B^{-1} = B^t$

Como $B^{-1} = B^t$ $\rightarrow$ / B^{-1} / = / B^t /

Por las propiedades de los determinantes, / B^{-1} / = $\dfrac{1}{|B|}$ y / B^t / = / B /

Por tanto, $\dfrac{1}{|B|}=|B| \quad \rightarrow \quad 1=|B|^2 \quad \rightarrow \quad |B|=\pm\sqrt{1}=\pm 1$, pero /B / > 0, por lo que /B / = 1.

Solución: /B / = 1.