PROBLEMA B.1. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La comprobación de que $C^2 = 2\,C - I$, siendo $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3 x 3, *(2,5 puntos)*
y el valor de la matriz C^4. *(2,5 puntos)*

b) El valor del determinante de la matriz $\left(3\,A^4\right)\left(4\,A^2\right)^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale -1. *(3 puntos)*

c) La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad $B\,B = B$. *(2 puntos)*

Solución:

a) Comprobemos que $C^2 = 2\,C - I$.

$$C^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.5-4.2-2..4 & -5.4+4.1+2.4 & 5.2-4.1-2.1 \\ 2.5-1.2-1.4 & -2.4+1.1+1.4 & 2.2-1.1-1.1 \\ -4.5+4.2+1.4 & 4.4-4.1-1.4 & -4.2+4.1+1.1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2C - I = 2\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el mismo resultado; por lo tanto queda comprobado que $\boldsymbol{C^2 = 2\,C - I}$**.**

Calculemos C^4,

$C^4 = C^2 \,.\, C^2 = (2\,C - I)\,.\,(2\,C - I) = 2\,C\,2\,C - 2\,C\,I - I\,2\,C + I^2 = 4\,C^2 - 2\,C - 2\,C + I =$
$= 4\,C^2 - 4\,C + I = 4\,(2\,C - I) - 4\,C + I = 8\,C - 4\,I - 4\,C + I = 4\,C - 3\,I =$

$$4C - 3I = 4\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

Luego, $C^4 = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$

b) $/A/ = -1$ *y A es 4x4*

Calculemos $\left|\left(3\,A^4\right)\left(4\,A^2\right)^{-1}\right|$

Considerando las propiedades de los determinantes:

$|A\,B| = |A|\,|B|,\quad \left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|} \quad y \quad |n\,A| = n^4\,|A| \quad (\textit{por ser } A\ \ 4x4)$

$$\left| \left(3\,A^4\right)\left(4\,A^2\right)^{-1} \right| = \left|3\,A^4\right| \left|\left(4\,A^2\right)^{-1}\right| = 3^4\,\left|A^4\right| \frac{1}{\left|\left(4\,A^2\right)\right|} = 3^4\,\left|A\right|^4 \frac{1}{4^4\,\left|A^2\right|} = 81\,.\,(-1)^4\ \frac{1}{256\,\left|A^2\right|} = \frac{81}{256\,\left|A\right|^2} =$$

$$= \frac{81}{256\,(-1)^2} = \frac{81}{256}$$

Solución: $\left| \left(3\,A^4\right)\left(4\,A^2\right)^{-1} \right| = \frac{81}{256}$**.**

c) ¿ matriz B ? / existe B^{-1} *y* $B\,B = B$

Partimos de $B\,B = B$, *como existe* B^{-1} *multiplicamos la igualdad por la derecha por* B^{-1},

$B^{-1}\,B\,B = B^{-1}\,B$

$I\,B = I$

$B = I$

Solución: B = I (B es la matriz identidad).